道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

$\boxed{1}$

方程式 $4^x-2^x=12$ の解は $x=$ ア$\boxed{}$ である。k を定数とするとき，方程式 $4^x-2^x=k$ がただ 1 つの解をもつのは k の値が $k\geqq$ イ$\boxed{}$ の範囲にあるか，または，$k=$ ウ$\boxed{}$ のときである。また，$k=$ ウ$\boxed{}$ のとき，方程式 $4^x-2^x=k$ の解は $x=$ エ$\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$

k を定数とする。関数 $y=4^x+4^{-x}-2k(2^x+2^{-x})+2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　y の最小値を k を用いて表せ。

(2)　r を実数とする。$k=5$ のとき，$y=r$ となるような x の個数が r の値によってどのように変化するか調べよ。

$\boxed{3}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲にある θ に対し，$f(\theta)=2(\cos^3\theta-\sin^3\theta)$，$t=\cos\theta-\sin\theta$ とおく。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(3)　実数 k に対して，$f(\theta)=k$ を満たす θ の個数を調べよ。

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

$\boxed{4}$

定数 a を実数とし，$0 \leqq x \leqq \pi$ とする。

関数 $y=-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2a(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+4$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ とするとき，t の値の範囲を求めよ。

(2)　y を t の式で表せ。

(3)　$0 \leqq y \leqq 6$ が常に成り立つように，a の値の範囲を定めよ。

(4)　方程式 $-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-2a(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+4=0$ が 3 個以上の異なる実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{5}$

$f(x)=x^2-\dfrac{4}{5}$ とおく。

(1)　2 次方程式 $f(x)=x$ の 2 つの解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。α，β の値を求めよ。

(2)　(1) の α について，$f(f(\alpha))$ の値を求めよ。

(3)　関数 $f(f(x))$ を求めよ。

(4)　方程式 $f(f(x))=x$ を解け。

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

$\boxed{1}$

解答　(ア)　2　　(イ)　0　　(ウ)　$-\frac{1}{4}$　　(エ)　-1

$\boxed{2}$

解答　(1)　証明略，$4^x+4^{-x}=t^2-2$

(2)　$k<2$ のとき最小値 $4-4k$，$k\geqq 2$ のとき最小値 $-k^2$

(3)　$r<-25$ のとき　0 個，$r=-25$，$r>-16$ のとき　2 個

$-25<r<-16$ のとき　4 個，$r=-16$ のとき　3 個

$\boxed{3}$

解答　(1)　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq 1$　　(2)　$f(\theta)=-t^3+3t$

(3)　$k<-2$，$2<k$ のとき 0 個，$-\sqrt{2}<k\leqq 2$ のとき 1 個，

$k=-2$，$-\sqrt{2}$ のとき 2 個，$-2<k<-\sqrt{2}$ のとき 3 個

$\boxed{4}$

解答　(1)　$-1\leqq t\leqq 2$　　(2)　$y=t^2-2at+2$　　(3)　$0\leqq a\leqq\sqrt{2}$　　(4)　$\sqrt{2}<a\leqq\frac{3}{2}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$\alpha=\frac{5-\sqrt{105}}{10}$，$\beta=\frac{5+\sqrt{105}}{10}$　　(2)　$\frac{5-\sqrt{105}}{10}$

(3)　$f(f(x))=x^4-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{25}$　　(4)　$x=\frac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

$\boxed{1}$

$2^x=X$ …… ① とおくと，$X>0$ であり，方程式は　　$X^2-X=12$

整理して因数分解すると　　$(X+3)(X-4)=0$

$X>0$ であるから　$X=4$　　　すなわち　$2^x=4$

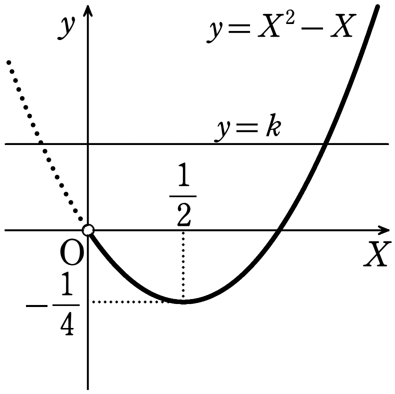
よって　　$x={}^{ア}2$

① から，$X>0$ のとき X と x は 1 対 1 に対応するので，方程式 $4^x-2^x=k$ の解の個数 は，方程式 $X^2-X=k$ の $X>0$ における解の個数と一致する。

この解の個数は，$y=X^2-X\ (X>0)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数と一致する。

よって，方程式 $X^2-X=k$ の解がただ 1 つであるのは，右の図から

$$k \geqq {}^{イ}0 \quad \text{または} \quad k={}^{ウ}-\frac{1}{4}$$



また，$k=-\dfrac{1}{4}$ のときの解は　$X=\dfrac{1}{2}$

すなわち　　$2^x=\dfrac{1}{2}$　　　よって　　$x={}^{エ}-1$

$\boxed{2}$

(1)　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$t=2^x+2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$$

等号が成り立つのは，$2^x=2^{-x}$ すなわち $x=0$ のときである。

よって，t の最小値は 2 である。

また　　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

(2)　$y=4^x+4^{-x}-2k(2^x+2^{-x})+2=(t^2-2)-2kt+2=t^2-2kt=(t-k)^2-k^2$

t のとり得る値の範囲は　　$t \geqq 2$

[1]　$k<2$ のとき

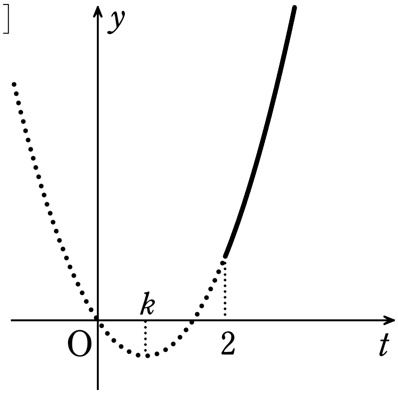
y は $t=2$ のとき最小値をとり，その最小値は　　$4-4k$

[2]　$k \geqq 2$ のとき

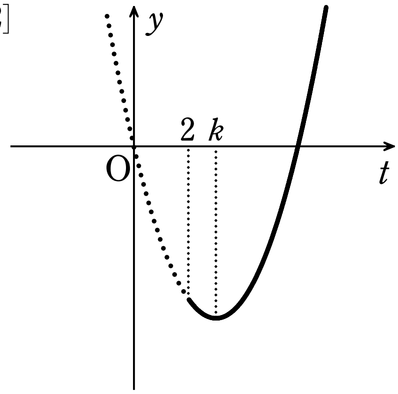
y は $t=k$ のとき最小値をとり，その最小値は　　$-k^2$

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

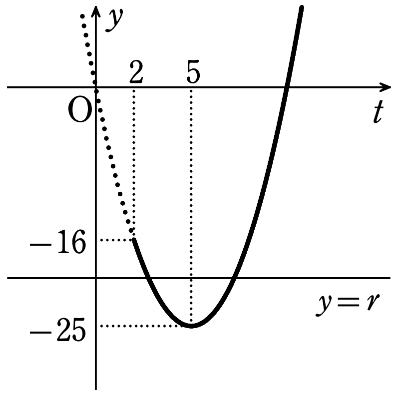
[1]



[2]



(3)　$k=5$ のとき　　$y=(t-5)^2-25$



$y=(t-5)^2-25$ $(t \geqq 2)$ のグラフは右の図のようになる。

また，t を固定したとき，$t=2^x+2^{-x}$ を満たす実数 x の個数を考える。

$t=2^x+2^{-x}$ から　　$2^{2x}-t\,2^x+1=0$

$2^x=X$ とおくと　　$X^2-tX+1=0$　……①

X についての方程式①の判別式を D とすると

$$D=t^2-4$$

よって，①の異なる実数解の個数は

　$t=2$ のとき　1個，$t>2$ のとき　2個

また，$t>2$ のとき，方程式①の解は2個とも正である。

したがって，$t=2^x+2^{-x}$ を満たす実数 x の個数は

　$t=2$ のとき　1個，$t>2$ のとき　2個

以上と $y=(t-5)^2-25$ $(t \geqq 2)$ のグラフから，$y=r$ となるような x の個数は

　$r<-25$ のとき　0個

　$r=-25$，$r>-16$ のとき　2個

　$-25<r<-16$ のとき　4個

　$r=-16$ のとき　3個

$\boxed{3}$

(1)　$t=\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta + \dfrac{3}{4}\pi \leqq \dfrac{7}{4}\pi$ であるから　$-1 \leqq \sin\left(\theta + \dfrac{3}{4}\pi\right) \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　　$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$

(2)　$t = \cos\theta - \sin\theta$ の両辺を平方すると　$t^2 = \cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta$

よって　　$\cos\theta\sin\theta = \dfrac{1-t^2}{2}$

したがって

$f(\theta) = 2(\cos^3\theta - \sin^3\theta) = 2(\cos\theta - \sin\theta)(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)$

$= 2(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta\sin\theta) = 2t\left(1 + \dfrac{1-t^2}{2}\right) = -t^3 + 3t$

(3)　$f(\theta) = g(t)$ とおくと　　$g(t) = -t^3 + 3t$

$g'(t) = -3t^2 + 3 = -3(t+1)(t-1)$

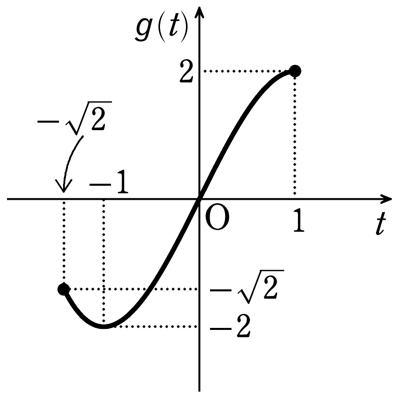
$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の増減表は，次のようになる。

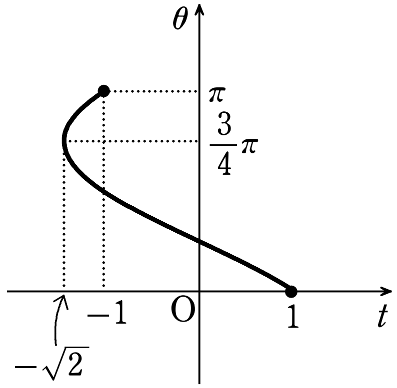
t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0
$g(t)$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

したがって，$y = g(t)$

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

$(-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1)$ のグラフは右の上図のようになる。また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ のグラフを θ 軸を縦軸，t 軸を横軸にとってかくと，右の下図のようになる。





この 2 つの図から，求める θ の個数は次のようになる。

$k>2$ のとき 0 個

$-\sqrt{2}<k \leqq 2$ のとき 1 個

$k=-\sqrt{2}$ のとき 2 個

$-2<k<-\sqrt{2}$ のとき 3 個

$k=-2$ のとき 2 個

$k<-2$ のとき 0 個

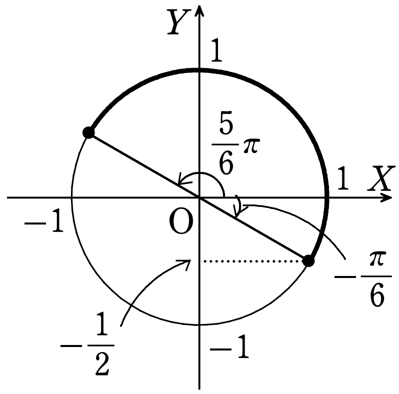
$\boxed{4}$

(1)　$t=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ から　　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq x-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$

よって　　$-\dfrac{1}{2} \leqq \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

したがって　　$-1 \leqq t \leqq 2$



(2)　$t^2=(\sqrt{3}\sin x-\cos x)^2$

$$=3\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x$$

$$=3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$=-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2$$

よって　　$-\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=t^2-2$

ゆえに　　$y=(t^2-2)-2at+4=t^2-2at+2$

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

(3)　$f(t)=t^2-2at+2$ とすると　　$f(t)=(t-a)^2-a^2+2$

$0\leqq y\leqq 6$ が常に成り立つための条件は，次のようになる。

[1]　$a\leqq -1$ のとき

$f(-1)\leqq y\leqq f(2)$ であるから　　$f(-1)\geqq 0$ かつ $f(2)\leqq 6$

すなわち　　$2a+3\geqq 0$ かつ $-4a+6\leqq 6$

これを解くと　$a\geqq 0$　　　　　これと $a\leqq -1$ の共通範囲はない。

[2]　$-1<a<\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(a)\leqq y\leqq f(2)$ であるから　　$f(a)\geqq 0$ かつ $f(2)\leqq 6$

すなわち　　$-a^2+2\geqq 0$ かつ $-4a+6\leqq 6$

これを解くと　$0\leqq a\leqq \sqrt{2}$　　　　これと $-1<a<\dfrac{1}{2}$ の共通範囲は　$0\leqq a<\dfrac{1}{2}$

[3]　$\dfrac{1}{2}\leqq a<2$ のとき

$f(a)\leqq y\leqq f(-1)$ であるから　　$f(a)\geqq 0$ かつ $f(-1)\leqq 6$

すなわち　　$-a^2+2\geqq 0$ かつ $2a+3\leqq 6$

これを解くと　$-\sqrt{2}\leqq a\leqq \sqrt{2}$　　　これと $\dfrac{1}{2}\leqq a<2$ の共通範囲は　$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq \sqrt{2}$

[4]　$2\leqq a$ のとき

$f(2)\leqq y\leqq f(-1)$ であるから　　$f(2)\geqq 0$ かつ $f(-1)\leqq 6$

すなわち　　$-4a+6\geqq 0$ かつ $2a+3\leqq 6$

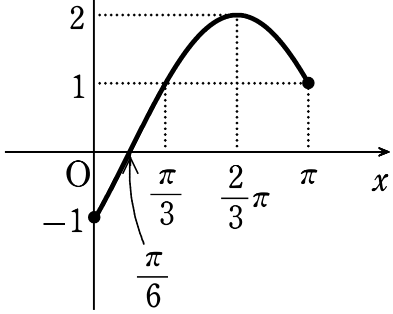
これを解くと　$a\leqq \dfrac{3}{2}$　　　　　これと $2\leqq a$ の共通範囲はない。

以上から，求める a の値の範囲は　　$0\leqq a\leqq \sqrt{2}$

(4)　方程式を t で表すと

$$t^2-2at+2=0 \quad \text{すなわち} \quad f(t)=0$$

$t=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ のグラフは，右の図のようになる。



よって，$-1\leqq t<1$，$t=2$ のとき，x はただ 1 つの値をとり，$1\leqq t<2$ のとき，x は異なる 2 つの値をとる。

したがって，与えられた方程式が 3 個以上の異なる

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

実数解をもつのは，次の [1]〜[3] の場合が考えられる。

[1]　$f(t)=0$ が $1\leqq t<2$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもつとき

(与えられた方程式の実数解は 4 個)

$$f(a)<0 \text{ かつ } 1<a<2 \text{ かつ } f(1)\geqq 0 \text{ かつ } f(2)>0$$

$f(a)<0$ から　　$-a^2+2<0$　　　　よって　$a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a$

$f(1)\geqq 0$ から　　$-2a+3\geqq 0$　　　　よって　$a\leqq\dfrac{3}{2}$

$f(2)>0$ から　　$-4a+6>0$　　　　よって　$a<\dfrac{3}{2}$

共通範囲を求めて　　$\sqrt{2}<a<\dfrac{3}{2}$

[2]　$f(t)=0$ が $-1\leqq t<1$ と $1\leqq t<2$ の範囲に 1 つずつ解をもつとき

(与えられた方程式の実数解は 3 個)

このとき，「$f(1)\leqq 0$ かつ $f(2)>0$」であることが必要であるが，$f(2)=2f(1)$ であるから，$f(1)$ と $f(2)$ は同符号である。

よって，条件を満たすような a の値は存在しない。

[3]　$f(t)=0$ の 1 つの解が $t=2$ で，他の解が $1\leqq t<2$ の範囲にあるとき

(与えられた方程式の実数解は 3 個)

$f(t)=0$ が $t=2$ を解にもつから　　$f(2)=-4a+6=0$

よって　　$a=\dfrac{3}{2}$

$f(2)=0$ のとき $f(1)=0$ であるから，$f(t)=0$ の解は $t=1$，2 となり，適する。

[1]，[2]，[3] から，求める a の値の範囲は　　$\sqrt{2}<a\leqq\dfrac{3}{2}$

5

(1)　$x^2-\dfrac{4}{5}=x$ から　　$5x^2-5x-4=0$

$\alpha<\beta$ であるから　　$\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$，$\beta=\dfrac{5+\sqrt{105}}{10}$

(2)　$f(\alpha)=\alpha$ から　　$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha=\dfrac{5-\sqrt{105}}{10}$

(3)　$f(f(x))=f\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)=\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)^2-\dfrac{4}{5}=x^4-\dfrac{8}{5}x^2-\dfrac{4}{25}$

道具箱　合成関数（道具箱③２で、再び配布予定）

(4)　$f(f(x))=x$ から　$x^4-\frac{8}{5}x^2-\frac{4}{25}=x$

すなわち　$25x^4-40x^2-25x-4=0$　…… ①

ここで，$f(f(\alpha))=\alpha$，$f(f(\beta))=\beta$ から $x=\alpha$，β は ① を満たす。

よって，① の左辺は $5x^2-5x-4$ を因数にもち　$(5x^2-5x-4)(5x^2+5x+1)=0$

したがって，$f(f(x))=x$ すなわち ① の解は　$x=\frac{5\pm\sqrt{105}}{10}$，$\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$