試験時間60分　【解答解説】

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[10^n\pi]}{10^n}$ の値を求めよ。ただし，$[x]$ は，実数 x に対して，$m \leqq x < m+1$ を満たす整数 m である。（答えだけで良い）

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n(x)\}$ は $a_n(x)=\dfrac{\sin^{2n+1}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ で定められたものとする.

(1)　この数列の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(x)$ を求めよ.

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(x)$ を $A(x)$ とおくとき，関数 $y=A(x)$ のグラフを図示せよ.

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-6x+8}$ で $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=6$ とすると，$a=$ ア $\boxed{}$，$b=$ イ $\boxed{}$ である．更に，$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=-10$ とすると，$c=$ ウ $\boxed{}$，$d=$ エ $\boxed{}$ である.

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+x-1}{\sin x}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin(\log(x+1)-\log x)$ を求めよ。ここで，対数は自然対数である。

$\boxed{6}$ 次の極限が有限の値となるように定数 a，b を定め，そのときの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}$$

$\boxed{7}$ 関数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \leqq 1) \\ \dfrac{ax+b}{x+1} & (x>1) \end{cases}$ が $x=1$ で微分可能であるとき，a，b の値を求めよ.

$\boxed{8}$ 直線 $y=x$ と放物線 $y=(x-n)^2$ で囲まれた図形の面積を S_n とする（n は自然数）．このとき，$L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^\alpha}$ が存在して，かつ $L \fallingdotseq 0$ となるのは $\alpha=\boxed{}$ のときである.

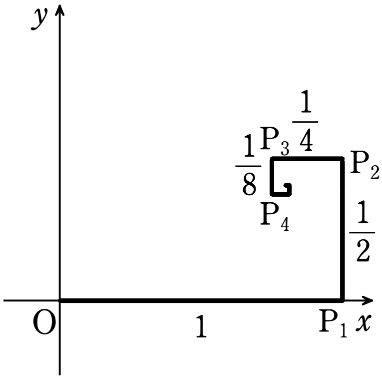
$\boxed{9}$ 座標平面上の動点 P，Q は，原点からスタートし，まず x 軸の正の方向に長さ 1 だけ進む。次に，左（反時計回り）に一定の角度だけ向きを変え，$\dfrac{1}{2}$ 進む。以後同様に，一定の角度だけ向きを変えてから直前に移動した距離の半分ずつ進むものとする。

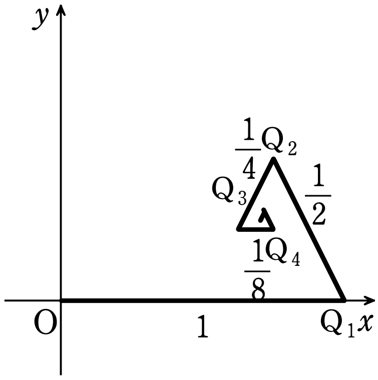
(1)　動点 P は毎回 90° だけ向きを変えるものとする。図 1 のように，P_1，P_2，P_3，……とするとき，$P_{2n}(x_{2n},\ y_{2n})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を n を用いて表せ。

(2)　これを無限に繰り返したとき，動点 P が近づく点の座標を求めよ。

(3)　動点 Q は毎回 120° だけ向きを変えるものとする。図 2 のように，Q_1，Q_2，Q_3，……とするとき，$Q_{3n}(x_{3n},\ y_{3n})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を n を用いて表せ。

(4)　これを無限に繰り返したとき，動点 Q が近づく点の座標を求めよ。





1 解答　π

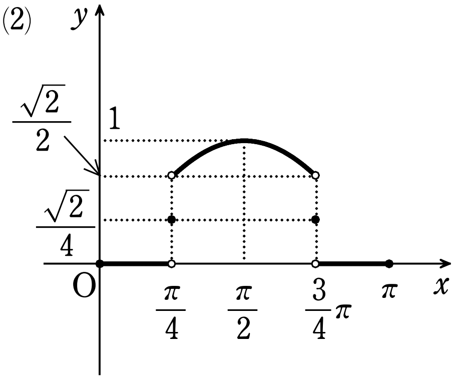
2 解答　(1)　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi < x \leqq \pi$ のとき　0；

$x = \dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\sin x$

(2)　〔図〕

(2)



3 解答　(ア)　0　(イ)　6　(ウ)　-4　(エ)-16

4 解答　2

5 解答　1

6 解答　$a = 4$，$b = -1$，極限値 $-\dfrac{15}{8}$

7 解答　$a = 6$，$b = -2$

8 解答　$\dfrac{3}{2}$

9 解答　(1)　$\left(\dfrac{4}{5}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right\},\ \dfrac{2}{5}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}\right)$　(2)　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

(3)　$\left(\dfrac{5}{7}\left\{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^n\right\},\ \dfrac{\sqrt{3}}{7}\left\{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^n\right\}\right)$　(4)　$\left(\dfrac{5}{7},\ \dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)$

$\boxed{1}$ $[10^n\pi] \leqq 10^n\pi < [10^n\pi]+1$ が成り立つから

$$\frac{[10^n\pi]}{10^n} \leqq \pi < \frac{[10^n\pi]+1}{10^n} \quad \text{すなわち} \quad \frac{[10^n\pi]}{10^n} \leqq \pi < \frac{[10^n\pi]}{10^n}+\frac{1}{10^n}$$

よって　$\pi-\dfrac{1}{10^n} < \dfrac{[10^n\pi]}{10^n} \leqq \pi$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\pi-\frac{1}{10^n}\right)=\pi$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\pi=\pi$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[10^n\pi]}{10^n}=\pi$

$\boxed{2}$ (1)　[1]　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi < x \leqq \pi$ のとき

$0 \leqq \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} < 1$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x\cdot\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^n}{\left(\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^n+1}=0$

[2]　$x=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi$ のとき

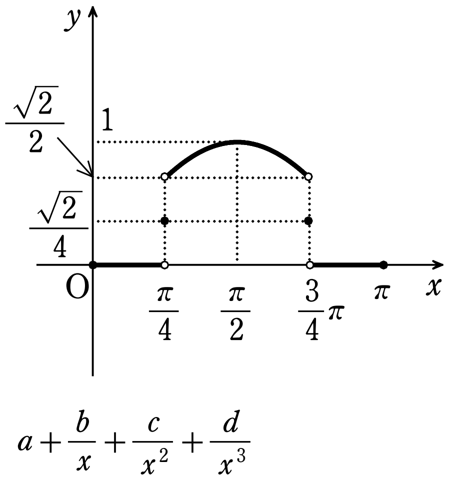
$\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=1$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{1+\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^n}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

[3]　$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3}{4}\pi$ のとき

$0 \leqq \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} < 1$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{1+\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)^n}=\sin x$

(2)　$A(x)=\begin{cases} 0 & \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi < x \leqq \pi\right) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4} & \left(x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi\right) \\ \sin x & \left(\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3}{4}\pi\right) \end{cases}$

〔図〕



$\boxed{3}$ $x \neq 0$ のとき $f(x)$ の分母・分子を x^3 で割って　$f(x)=\dfrac{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{d}{x^3}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=6$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}\right)=0$

であることが必要．ゆえに　$a=0$

よって $f(x)=\dfrac{bx^2+cx+d}{x^2-6x+8}$ であり，$x\neq 0$ のとき $f(x)=\dfrac{b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x^2}}{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x^2}}$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{b}{1}=b$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=6$ から　$b=6$

よって　$f(x)=\dfrac{6x^2+cx+d}{x^2-6x+8}=\dfrac{6x^2+cx+d}{(x-2)(x-4)}$

$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)(x-4)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to 2}(6x^2+cx+d)=0$ であることが必要.

ゆえに　$6\cdot 2^2+2c+d=0$　すなわち　$d=-2c-24$ ……①

このとき　$6x^2+cx+d=6x^2+cx-2c-24$
$=(x-2)(6x+c+12)$

よって
$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(6x+c+12)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{6x+c+12}{x-4}=\frac{6\cdot 2+c+12}{2-4}=-\frac{24+c}{2}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{x\to 2}f(x)=-10$ から　$-\dfrac{24+c}{2}=-10$

よって　$c=-4$

したがって，① から　$d=-2(-4)-24=-16$

逆に，$a={}^{ア}0$，$b={}^{イ}6$，$c={}^{ウ}-4$，$d={}^{エ}-16$ のとき題意を満たす.

$\boxed{4}$ $(与式)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x-1}{x}+1}{\dfrac{\sin x}{x}}$

$f(x)=e^x$ とおくと　$f'(x)=e^x$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

ゆえに　$(与式)=\dfrac{1+1}{1}=2$

$\boxed{5}$ $x\sin(\log(x+1)-\log x)=x\sin\left(\log\dfrac{x+1}{x}\right)=x\sin\left(\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$$=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{\sin\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\frac{\sin\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$x \to \infty$ のとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \to e$，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \to 0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty} x\sin(\log(x+1)-\log x) = \log e \cdot 1 = 1$$

$\boxed{6}$ $x \longrightarrow 0$ のとき，(与式の分母) $\longrightarrow 0$ であるから，極限値が存在するためには，
(与式の分子) $\longrightarrow 4-a=0$ であることが必要.

ゆえに　$a=4$

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ を用いると

$$与式の分数 = \frac{\sqrt{16-8x-14\sin^2 x}-(4+bx)}{x^2}$$

$$= \frac{16-8x-14\sin^2 x-(4+bx)^2}{x^2(\sqrt{16-8x-14\sin^2 x}+4+bx)}$$

$$= \frac{-8\dfrac{1+b}{x}-\left(14\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+b^2\right)}{\sqrt{16-8x-14\sin^2 x}+4+bx} \cdots\cdots ①$$

$x \longrightarrow 0$ のとき　(①の分母) $\longrightarrow 8$,

(①の分子の第 2 項) $\longrightarrow -(14+b^2)$ に注意すると，$\displaystyle\lim_{x\to 0}$① が有限の値となるためには,

① の分子の第 1 項について，$1+b=0$ でなければならない.

よって　$b=-1$

したがって，$x \longrightarrow 0$ のとき

$$与式 \longrightarrow \frac{-(14+b^2)}{8} = -\frac{15}{8}$$

以上から　$a=4$，$b=-1$，極限値 $-\dfrac{15}{8}$

$\boxed{7}$ $f(x)$ は $x=1$ で連続であるから

$$2 = f(1) = \lim_{x\to 1+0}\frac{ax+b}{x+1} = \frac{a+b}{2}$$

ゆえに　$a+b=4 \cdots\cdots ①$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{(1+h)^2+1-2}{h} = \lim_{h\to -0}(2+h) = 2,$$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{\dfrac{a(1+h)+b}{2+h}-\dfrac{a+b}{2}}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{a-b}{2(2+h)} = \frac{a-b}{4}$$

$f(x)$ は $x=1$ で微分係数をもつから　$\dfrac{a-b}{4}=2$　　ゆえに　$a-b=8 \cdots\cdots ②$

①，②から　$a=6$，$b=-2$

$\boxed{8}$ $(x-n)^2 = x$ から　$x^2-(2n+1)x+n^2=0$

この方程式の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと

$$\alpha+\beta = 2n+1,\ \alpha\beta = n^2$$

ゆえに　$(\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta = (2n+1)^2-4n^2 = 4n+1$

よって　$S_n=\int_\alpha^\beta\{x-(x-n)^2\}dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(4n+1)^{\frac{3}{2}}$

したがって，$L=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^\alpha}$ が存在して，かつ $L\fallingdotseq 0$ となるのは　$\alpha=\frac{3}{2}$

$\boxed{9}$ (1)　$x_{2n}=1+\left(-\frac{1}{2^2}\right)+\left(-\frac{1}{2^2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{2^2}\right)^{n-1}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

$y_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2^2}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2^2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}x_{2n}=\frac{2}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}$

よって，点 P_{2n} の座標は　$\left(\frac{4}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\},\ \frac{2}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}\right)$

(2)　$x_{2n-1}=x_{2n}$，$y_{2n+1}=y_{2n}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\frac{4}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}y_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}y_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}=\frac{2}{5}$$

よって，動点 P が近づく点の座標は　$\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$

(3)　$x_{3n}=\left(1+\frac{1}{2}\cos120^\circ+\frac{1}{2^2}\cos240^\circ\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\cos120^\circ+\frac{1}{2^5}\cos240^\circ\right)$

$+\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}\cos120^\circ+\frac{1}{2^8}\cos240^\circ\right)$

$+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{3n-3}}+\frac{1}{2^{3n-2}}\cos120^\circ+\frac{1}{2^{3n-1}}\cos240^\circ\right)$

$=\frac{5}{8}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{2^6}\cdot\frac{5}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{3(n-1)}}\cdot\frac{5}{8}$

$=\frac{5}{8}\left\{1+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}=\frac{5}{8}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}$

$y_{3n}=\left(1\cdot0+\frac{1}{2}\sin120^\circ+\frac{1}{2^2}\sin240^\circ\right)+\left(\frac{1}{2^3}\cdot0+\frac{1}{2^4}\sin120^\circ+\frac{1}{2^5}\sin240^\circ\right)$

$+\left(\frac{1}{2^6}\cdot0+\frac{1}{2^7}\sin120^\circ+\frac{1}{2^8}\sin240^\circ\right)$

$+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{3n-3}}\cdot0+\frac{1}{2^{3n-2}}\sin120^\circ+\frac{1}{2^{3n-1}}\sin240^\circ\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2^6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{3(n-1)}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left\{1+\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n}{1-\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{3}}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}$$

よって，点 Q_{3n} の座標は　$\left(\frac{5}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\},\ \frac{\sqrt{3}}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}\right)$

(4)　$x_{3n+1}=x_{3n}+\frac{1}{2^{3n}}$

$$x_{3n+2}=x_{3n+1}+\frac{1}{2^{3n+1}}\cos 120^\circ=x_{3n}+\left(\frac{1}{8}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

よって　$\lim_{n\to\infty}x_{3n}=\lim_{n\to\infty}x_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}x_{3n+2}=\frac{5}{7}$

また　$y_{3n+1}=y_{3n}$

$$y_{3n+2}=y_{3n+1}+\frac{1}{2^{3n+1}}\sin 120^\circ=y_{3n}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}y_{3n}=\lim_{n\to\infty}y_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}y_{3n+2}=\frac{\sqrt{3}}{7}$

よって，動点 Q が近づく点の座標は　$\left(\frac{5}{7},\ \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$