(1)　整数 l，m が $1 \leqq l < m \leqq p$ を満たすとする。

$x-lq$ と $x-mq$ を p で割った余りが等しいと仮定すると，整数 L，M を用いて

$$x-lq=pL+k, \quad x-mq=pM+k$$

と表される。

よって　$x-lq-(x-mq)=pL+k-(pM+k)$

すなわち　$(m-l)q=(L-M)p$

p，q は互いに素であるから，$m-l$ は p の倍数である。

一方，$1 \leqq l < m \leqq p$ であるから　$0 < m-l \leqq p-1$ …… ①

よって，$m-l$ が p の倍数であることは，① に矛盾する。

ゆえに，$x-lq$ と $x-mq$ を p で割った余りは異なる。

すなわち，すべての整数 x に対して，p 個の整数 $x-q$，$x-2q$，……，$x-pq$ を p で割った余りはすべて異なる。

(2)　(1) より，p 個の整数

$$x-q,\ x-2q,\ \cdots\cdots,\ x-pq$$

を p で割った余りはすべて異なる。

一方，これらを p で割った余りは 0 以上 $p-1$ 以下の整数である。

よって，$x-q$，$x-2q$，……，$x-pq$ の中に，p で割った余りが 0 であるものが存在する。

その数を $x-bq$(b は $1 \leqq b \leqq p$ を満たす自然数) とすると，ある整数 a を用いて

$$x-bq=ap \quad すなわち \quad x=ap+bq$$

と表される。

また，$1 \leqq b \leqq p$ と $x > pq$ から　$0 < x-pq \leqq x-bq$

よって，$0 < ap$ であるから　$a > 0$

ゆえに，a は自然数である。

したがって，x はある自然数 a，b を用いて $x=ap+bq$ と表される。

3　$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_n$ および $b_1>b_2>\cdots\cdots>b_n$ を満たす $2n$ 個の実数がある．集合 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$ から要素を１つ，集合 $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$ から要素を１つ取り出して，掛け合わせて積を作る．どの要素も一度しか使わないこととし，この操作をくり返し，n 個の積を作り，それら n 個の積の和を S とする．

(1)　$n=2$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ．

(2)　n が２以上のとき，S の最大値と最小値を求めよ．　（お茶の水女子大）

⟹30

＜(1)の考え方＞　$n=2$ のとき，具体的に S としてどのような和が考えられるか，書き出してみる．「大小関係は差をとれ」の方針で，最大値と最小値を決める．

＜(1)の解＞

$n=2$ のとき，$a_1>a_2$，$b_1>b_2$ を満たす４個の実数がある．集合 $\{a_1,\ a_2\}$，$\{b_1,\ b_2\}$ から要素を１つずつ取り出して積をつくり，それらの和 S を作ると，

$S=a_1b_1+a_2b_2$　または　$S=a_1b_2+a_2b_1$

の２通りの場合が考えられる．

$$a_1b_1+a_2b_2-(a_1b_2+a_2b_1)=a_1(b_1-b_2)-a_2(b_1-b_2)$$
$$=(a_1-a_2)(b_1-b_2)\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$a_1>a_2$，$b_1>b_2$ より，　$a_1-a_2>0$，$b_1-b_2>0$

したがって，①より，$a_1b_1+a_2b_2-(a_1b_2+a_2b_1)>0$

つまり，$a_1b_1+a_2b_2>a_1b_2+a_2b_1$

よって，最大値は　$\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2}$，最小値は　$\boldsymbol{a_1b_2+a_2b_1}$

◀具体的に書き出してみる．

◀この２つの S の大小関係を調べる．「大小関係は差をとれ」

◀S は２通りより，大きい方が最大値となる．

＜(2)の考え方＞　(1)の結果と次の不等式を利用する．
$a_i>a_j$，$b_k>b_l$ のとき，$a_ib_k+a_jb_l>a_ib_l+a_jb_k$ が成り立つ．

＜(2)の解＞　$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_n$，$b_1>b_2>\cdots\cdots>b_n$ を満たす $2n$ 個の実数があり，集合 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n\}$，$\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$ から要素を１つずつ取り出し積を作り，それらの和 S を作るとき，a_1，a_2，$\cdots\cdots$，a_n に着目して，

$S=a_1b_1'+a_2b_2'+\cdots\cdots+a_nb_n'$　$\cdots\cdots(*)$ とする．

ここで，b_1'，b_2'，$\cdots\cdots$，b_n' は，b_1，b_2，$\cdots\cdots$，b_n を並べ換えたものとする．

このとき，$b_m'=b_1$ となる m が存在する

(1)より，$a_i>a_j$，$b_k>b_l$ のとき，

$a_ib_k+a_jb_l>a_ib_l+a_jb_k$　$\cdots\cdots①$ であるから，

◀a_n を順に並べる．

◀集合としては一致する．$\{b_1',\ b_2',\ \cdots\cdots,\ b_n'\}=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n\}$

◀$(*)$ を利用して最大値を求める．

$$\underset{\sim\sim}{a_1b_1'}+\cdots\cdots+\underset{\sim\sim}{a_mb_m'}+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$=\underset{\sim\sim}{a_1b_1'}+\cdots\cdots+\underset{\sim\sim}{a_mb_1}+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$<\underset{\sim\sim}{a_1b_1}+\cdots\cdots+\underset{\sim\sim}{a_mb_1'}+\cdots\cdots+a_nb_n' \quad \cdots\cdots②$$

◀ $a_1>a_m$, $b_1>b_m'$ より，
$a_1b_1+a_mb_m'$
$\quad >a_1b_m'+a_mb_1$

さらに，$b_p'=b_2$ となる p が存在するから，①，②より，

◀ n 個の項の中から 2 つの項だけに着目する．まずは，a_1 の項から．

$$a_1b_1+\underset{\sim\sim}{a_2b_2'}+\cdots\cdots+\underset{\sim\sim}{a_pb_p'}+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$=a_1b_1+\underset{\sim\sim}{a_2b_2'}+\cdots\cdots+\underset{\sim\sim}{a_pb_2}+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$<a_1b_1+\underset{\sim\sim}{a_2b_2}+\cdots\cdots+\underset{\sim\sim}{a_pb_2'}+\cdots\cdots+a_nb_n'$$

これをくり返していくと，

◀ $b_q'=b_3$ の場合，……というように順々に項を入れかえていく．

$$\underset{\sim\sim}{a_1b_1}+\underset{\sim\sim}{a_2b_2}+\underset{\sim\sim}{a_3b_3'}+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$<\cdots\cdots<a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n \quad \cdots\cdots③$$

また，一方，$b_q'=b_n$ となる q が存在するから，①より，

◀ 次に(＊)を利用して最小値を求める．

$$a_1b_1'+\cdots\cdots+a_qb_q'+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$=a_1b_1'+\cdots\cdots+a_qb_n+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$>a_1b_n+\cdots\cdots+a_qb_1'+\cdots\cdots+a_nb_n'$$

◀ $a_1>a_q$, $b_1'>b_n$ より，
$a_1b_1'+a_qb_n$
$\quad >a_1b_n+a_qb_1'$

これをくり返していくと，

$$a_1b_n+a_2b_2'+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$>\cdots\cdots>a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots\cdots+a_nb_1 \quad \cdots\cdots④$$

よって，③，④より，**最大値**　$\boldsymbol{a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n}$

最小値　$\boldsymbol{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots\cdots+a_nb_1}$

ワンポイントレッスン

(2)では，(1)の結果を利用するために，n 個の項の中から，2 つの項に着目した．
つまり，$\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$ からは，a_1 が掛けられている項，$\{b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\}$ からは b_1 が掛けられている項に着目し，(1)を利用することで，

$$\underset{\sim\sim}{a_1b_1'}+a_2b_2'+\cdots\cdots+\underset{\sim\sim}{a_m\underset{\substack{\Uparrow\\ b_1}}{b_m'}}+\cdots\cdots+a_nb_n'$$
$$<\underset{\sim\sim}{a_1b_1}+a_2b_2'+\cdots\cdots+\underset{\sim\sim}{a_mb_1'}+\cdots\cdots+a_nb_n'$$

つまり，2 つの項の関係だけで，不等式を導いている．これを a_2 と b_2，a_3 と b_3 というようにくり返していけば解の不等式を導くことができる．

また，$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_n$, $b_1>b_2>\cdots\cdots>b_n$ のとき

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n \geqq a_1b_1'+a_2b_2'+\cdots\cdots+a_nb_n'$$

(b_1', …, b_n' は，b_1, …, b_n を並べ換えたもの．すべての k で $b_k=b_k'$ のとき等号成立.）であることを用いると，不等式Ⓐが成り立つことより，次のことがわかる．

$n=3$ $(a_1>a_2>a_3,\ b_1>b_2>b_3)$ のときで考えると，

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3>a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2$$
$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3>a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1$$
$$\underline{+)\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}$$
$$3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)>(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3) \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

◀ $a_1(b_1+b_2+b_3)$
$+a_2(b_1+b_2+b_3)$
$+a_3(b_1+b_2+b_3)$

一般に n 個の場合でも同様に不等式をつくればよいから，

$$n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)>(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)$$

を導くことができる．この不等式を『チェビシュフの不等式』という．