試験時間60分　　解答は<u>解答用紙</u>に書いて、提出してください

$\boxed{1}$ $y=2\cos x+\sin 2x$ の $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最小値を求めよ。

$\boxed{2}$ $0<x<1$ で定義された関数 $f(x)=x(\log x)^2$ の最大値を求めよ。ただし，対数は自然対数である。

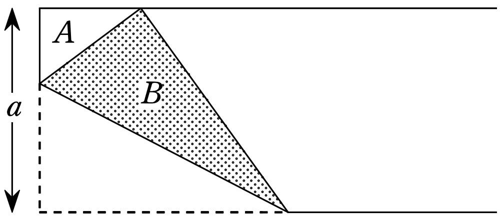
$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2}$ （a，b，c は定数）が $x=-2$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 2 をもつ。このとき a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$ $(x>0)$ の極大値を，大きい方から順に

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

とする。このとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和を求めよ。

$\boxed{5}$ 細長い長方形の紙があり，短い方の辺の長さが a で長い方が $9a$ であったとする。右図のように，この長方形の 1 つの角（かど）を反対側の長い方の辺に接するように折る。図に示した 三角形 A の面積の最大値を求めよ。



$\boxed{6}$ a を実数とする。このとき，曲線 $y=e^x$ と $y=(x-a)^2$ の両方に接する直線が存在するような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{7}$ 不等式 $\sqrt{x^2+y^2} \geqq x+y+a\sqrt{xy}$ が任意の正の実数 x，y に対して成立するような，最大の実数 a の値を求めよ。

$\boxed{8}$ ＊　下の表は，あるクラスの生徒 40 人について英語の試験の成績を男女別にして調べた結果である。クラス全体でのこの試験の平均点は $^{ア}\boxed{}$ であり，分散は $^{イ}\boxed{}$ である。

	人数	平均点	標準偏差
男	24 人	60 点	20
女	16 人	70 点	10

$\boxed{1}$ 解答　$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき 最小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$ 解答　$x=\dfrac{1}{e^2}$ のとき最大値 $\dfrac{4}{e^2}$

$\boxed{3}$ 解答　$a=1,\ b=2,\ c=3$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{8n-1}{4}\pi}$　　(2)　$\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$

$\boxed{5}$ 解答　(1)　$\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^2$　　(2)　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^2$

$\boxed{6}$ 解答　$a \leqq \log 4-2$

$\boxed{7}$ 解答　$\sqrt{2}-2$

$\boxed{8}$ 解答　(ア)　64　　(イ)　304

1　$y'=-2\sin x+2\cos 2x=-2\sin x+2(1-2\sin^2 x)=-4\sin^2 x-2\sin x+2$

$=-2(\sin x+1)(2\sin x-1)$

$y'=0$ のとき　$\sin x=-1,\ \dfrac{1}{2}$　　$-\pi \leqq x \leqq \pi$ であるから　$x=-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	-2

したがって，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

2　$f'(x)=(\log x)^2+x\cdot 2\log x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x(\log x+2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$\log x=0,\ -2$

$0<x<1$ であるから　　$x=\dfrac{1}{e^2}$

$0<x<1$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{e^2}$ のとき最大値 $\dfrac{4}{e^2}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e^2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$	

3　$f'(x)=\dfrac{(2ax+b)(x^2+2)-2x(ax^2+bx+c)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-bx^2+(4a-2c)x+2b}{(x^2+2)^2}$

$f'(-2)=0,\ f(-2)=\dfrac{1}{2},\ f'(1)=0,\ f(1)=2$ であることが必要。

$f'(-2)=\dfrac{-4b-8a+4c+2b}{36}=\dfrac{-8a-2b+4c}{36}=0$

$f'(1)=\dfrac{-b+4a-2c+2b}{9}=\dfrac{4a+b-2c}{9}=0$

よって　　$4a+b-2c=0$　$\cdots\cdots$ ①

$f(-2)=\dfrac{4a-2b+c}{6}=\dfrac{1}{2}$ から　　$4a-2b+c=3$　$\cdots\cdots$ ②

$f(1)=\dfrac{a+b+c}{3}=2$ から　　$a+b+c=6$　$\cdots\cdots$ ③

①，②，③ から　　$a=1,\ b=2,\ c=3$

逆に，このとき

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2},\quad f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	2	↘

以上から　$a=1,\ b=2,\ c=3$

$\boxed{4}$ (1)　$f(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}$ とおくと　$f(x)=e^{-x}\cos x$

$$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$f'(x)=0$ のとき $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ から $x+\dfrac{\pi}{4}=n\pi$ で　$x=\dfrac{4n-1}{4}\pi$（n は自然数）

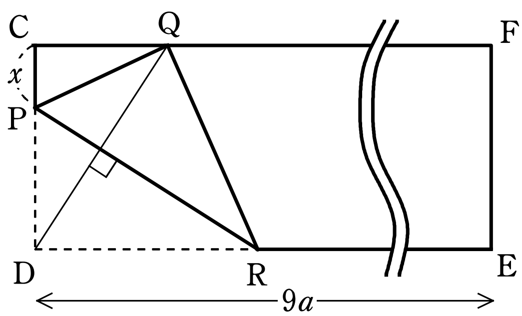
x	0		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{7}{4}\pi$		$\frac{11}{4}\pi$		$\frac{15}{4}\pi$	……
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘		↗	$\frac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{7}{4}\pi}}$	↘		↗	$\frac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{15}{4}\pi}}$	↘
			極小		極大		極小		極大	

増減表から　$a_n=f\left(\dfrac{8n-1}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{8n-1}{4}\pi}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{8n-1}{4}\pi}$

(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと S_n は初項 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{4}\pi}$，公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列の和であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{4}\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,(e^{2\pi}-1)}$$

$\boxed{5}$ 与えられた長方形を CDEF とし，右の図のように点 P，Q，R をとる。



CP$=x$ とすると　PQ$=$PD$=a-x$

また，△CQD と △DPR について

∠QCD＝∠PDR＝90°,

∠CDQ＝∠DRP＝90°－∠QDR

よって，△CQD∽△DPR であるから

CQ：CD＝DP：DR

ゆえに　$\mathrm{DR}=\dfrac{\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DP}}{\mathrm{CQ}}=\dfrac{a\cdot(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2-x^2}}=\dfrac{\sqrt{a}\,(a-x)}{\sqrt{a-2x}}$

ここで，xの定義域について考えると，DR＝DE のとき xの値は最大となる。

このとき DR$=9a$ であるから　$\dfrac{\sqrt{a}(a-x)}{\sqrt{a-2x}}=9a$

整理すると　$x^2+160ax-80a^2=0$

$x>0$ であるから　$x=(36\sqrt{5}-80)a$

よって，x の定義域は　$0<x\leqq(36\sqrt{5}-80)a$

(1)　三角形 A の面積を S_A とすると　$S_A=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}=\dfrac{\sqrt{a}}{2}x\sqrt{a-2x}$

$f(x)=x\sqrt{a-2x}$ とおくと

$$f'(x)=\sqrt{a-2x}+x\cdot\frac{1}{2}(a-2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)=\frac{a-3x}{\sqrt{a-2x}}$$

$0<x\leqq(36\sqrt{5}-80)a$ において $f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{a}{3}$

$0<x\leqq(36\sqrt{5}-80)a$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	$(36\sqrt{5}-80)a$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$	
$f(x)$	／	↗	極大	↘	

$f(x)$ が最大のとき S_A は最大となるから，S_A は

$$x=\frac{a}{3}\text{で最大値 }\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$$

をとる。

別解　$x>0$，$a-2x>0$ であるから，相加平均・相乗平均 の大小関係により

$$S_A=\frac{\sqrt{a}}{2}\sqrt{x\cdot x\cdot(a-2x)}$$
$$\leqq\frac{\sqrt{a}}{2}\sqrt{\left\{\frac{x+x+(a-2x)}{3}\right\}^3}=\frac{\sqrt{3}}{18}a^2$$

等号が成り立つのは，$x=a-2x$ すなわち $x=\dfrac{a}{3}$ のときである。

これは $0<x\leqq(36\sqrt{5}-80)a$ を満たす。

よって，S_A は $x=\dfrac{a}{3}$ で最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^2$ をとる。

(2)　三角形 B の面積を S_B とすると，QR$=$DR であるから

$$S_B=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\frac{1}{2}(a-x)\cdot\frac{\sqrt{a}(a-x)}{\sqrt{a-2x}}=\frac{\sqrt{a}(a-x)^2}{2\sqrt{a-2x}}$$

$g(x)=\dfrac{(a-x)^2}{\sqrt{a-2x}}$ とおくと

$$g'(x)=\frac{2(a-x)\cdot(-1)\cdot\sqrt{a-2x}-(a-x)^2\cdot\frac{1}{2}(a-2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2)}{a-2x}$$

$$=\frac{(a-x)(3x-a)}{(a-2x)^{\frac{3}{2}}}$$

$0<x\leqq(36\sqrt{5}-80)a$ において $g'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{a}{3}$

$0<x\leqq(36\sqrt{5}-80)a$ における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	$(36\sqrt{5}-80)a$
$g'(x)$	／	$-$	0	$+$	
$g(x)$	／	↘	極小	↗	

$g(x)$ が最小のとき S_B は最小となるから，S_B は

$$x=\frac{a}{3}\ \text{で最小値}\ \frac{\sqrt{a}\left(\frac{2}{3}a\right)^2}{2\sqrt{\frac{a}{3}}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2$$

をとる。

$\boxed{6}$ $y=e^x$ から　$y'=e^x$

曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線の方程式は

$$y-e^t=e^t(x-t)\quad\text{すなわち}\quad y=e^tx+(1-t)e^t$$

この直線が曲線 $y=(x-a)^2$ と接する条件は，yを消去した xの方程式

$$(x-a)^2=e^tx+(1-t)e^t$$

すなわち　$x^2-(2a+e^t)x+a^2+(t-1)e^t=0$

が重解をもつことである。

この方程式の判別式を D とすると，重解をもつ条件は

$D=(2a+e^t)^2-4\{a^2+(t-1)e^t\}=0$　　ゆえに　$4ae^t+e^{2t}-4(t-1)e^t=0$

$e^t>0$ であるから　$4a+e^t-4(t-1)=0$

変形すると　$t-1-\dfrac{e^t}{4}=a$　……①

曲線 $y=e^x$ と $y=(x-a)^2$ の両方に接する直線が存在する条件は，tについての方程式①

が少なくとも１つの実数解をもつことである。

$f(t)=t-1-\dfrac{e^t}{4}$ とおくと　$f'(t)=1-\dfrac{e^t}{4}=\dfrac{4-e^t}{4}$

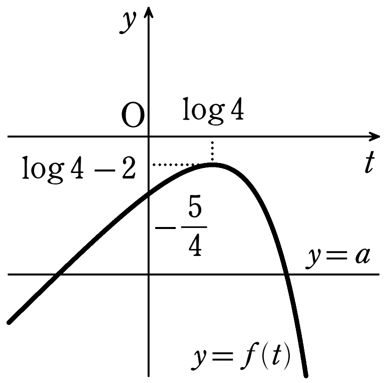
$f'(t)=0$ とすると　$t=\log 4$

$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	$\log 4$	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\nearrow$	$\log 4-2$	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} f(t)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(t-1-\frac{e^t}{4}\right)=-\infty$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ が共有点をもつとき，方程式 ① は実数解をもつ。

グラフから，求める a の値の範囲は　$a\leqq \log 4-2$

$\boxed{7}$ $y>0$ から，両辺を y で割ると

$$\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\geqq \frac{x}{y}+1+a\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$t=\dfrac{x}{y}$ とおくと　$t>0$

不等式は　$\sqrt{t^2+1}\geqq t+1+a\sqrt{t}$

この不等式を整理すると

$$\frac{\sqrt{t^2+1}-t-1}{\sqrt{t}}\geqq a \quad \cdots\cdots ①$$

よって，$t>0$ であるすべての実数 t に対して不等式 ① が成り立つような最大の実数 a を求めればよい。

$f(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}-t-1}{\sqrt{t}}$ とおくと

$$f(t)=\left(t+\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f'(t)&=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\\ &=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{t}{t^2+1}}\cdot\frac{t^2-1}{t^2}-\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2t\sqrt{t}}\\ &=\frac{(t-1)\left\{(t+1)-\sqrt{t^2+1}\right\}}{2t\sqrt{t(t^2+1)}}\end{aligned}$$

ここで　$(t+1)^2-\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2=(t^2+2t+1)-(t^2+1)=2t>0$

$t+1>0$，$\sqrt{t^2+1}>0$ であるから

$$(t+1)-\sqrt{t^2+1}>0$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	／	$-$	0	$+$
$f(t)$	／	↘	$\sqrt{2}-2$	↗

よって，$f'(t)=0$ とすると　　$t=1$

$t>0$ における $f(t)$ の増減表は右のようになる。

ゆえに，$f(t)$ は $t=1$ で最小値 $\sqrt{2}-2$ をとる。

したがって，$a \leqq \sqrt{2}-2$ であれば不等式 ① は常に成り立つから，求める a の値は　　$a=\sqrt{2}-2$

$\boxed{8}$ クラス全体の平均は　$\dfrac{24 \cdot 60+16 \cdot 70}{40}={}^{ア}64$　…… ①

一般に，ある変量 x のデータの平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 としたとき

$$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ。ここで，$\overline{x^2}$ は x^2 のデータ $x_1{}^2$，$x_2{}^2$，……，$x_n{}^2$ の平均値を表す。

男子の点数の 2 乗の平均値を a，女子の点数の 2 乗の平均値を b とする。

男子の標準偏差は 20 であるから　　$20^2=a-60^2$

よって　　$a=60^2+20^2$

女子の標準偏差は 10 であるから　　$10^2=b-70^2$

よって　　$b=70^2+10^2$

したがって，クラス全体の点数の 2 乗の平均値は

$$\frac{24a+16b}{40}=\frac{24(60^2+20^2)+16(70^2+10^2)}{40}$$
$$=10\{6(36+4)+4(49+1)\}=4400$$

①，② から，クラス全体の点数の分散は

$$\frac{24a+16b}{40}-64^2=4400-4096$$
$$={}^{イ}304$$