YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ⑫4　三角比・平面図形

標準問題

⑫標-1-1

円 O に内接する四角形において，AB＝3，BC＝2，CD＝2，DA＝4 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　AC の長さを求めよ。

(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

(3)　円 O の半径 R を求めよ。

(4)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

【解答】(1) AC＝4　(2) $S=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$　(2) $R=\dfrac{8\sqrt{15}}{15}$　(4) $r=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$

⑫標-1-2

△ABC において $\sin C-\sin B=2(\cos B-\cos C)\sin A$ が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

【解答】AB＝AC の二等辺三角形　または $A=\dfrac{2\pi}{3}$ の三角形

⑫標-1-3

四角形 ABCD は円に内接し，4 辺の長さは AB＝BC＝7，CD＝5，DA＝3 である。

(1)　対角線 AC，DB の長さを求めよ。

(2)　AC と DB の交点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ で表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ で表せ。

【解答】(1) AC＝7，BD＝8　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\dfrac{8}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\dfrac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$　←　DE：EB=15：49

⑫標-1-4

点 P は正方形 ABCD の頂点 A から正方形の内部に向かって出発し，次の 3 つの規則に従って動くものとする。

1. P が正方形の内部にあるときは直進する。
2. P が正方形の辺上に達したのちの P の進み方は，その辺を鏡とみなして光の反射の法則に従う。
3. P が正方形の頂点に達したときはそこで止まる。

点 P が A から出発するときの方向が辺 AB となす角を θ として，次の問いに答えよ。

(1)　$\tan\theta=0.6$ のとき，点 P は A, B, C, D のうち，どの頂点に止まるか。

(2)　P が頂点 B, C, D のそれぞれに止まるために $\tan\theta$ の値がみたすべき条件をそれぞれ説明せよ。

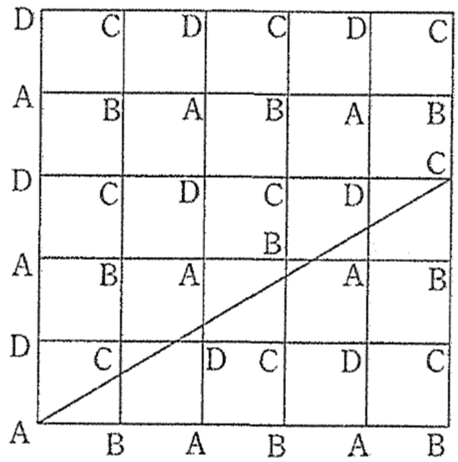
【解答】(1)C

(2) $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ （a, b は互いに素な整数）として，

B：a が奇数，b が偶数

C：a が奇数，b が奇数

D：a が偶数，b が奇数



発展問題

⑫発**-1-1**

鋭角三角形 ABC 内の点 P から 3 辺 BC，CA，AB に下ろした垂線の長さをそれぞれ x, y, z とする。P が外心，重心，垂心となったそれぞれの場合について，比 $x:y:z$ を∠A=A，∠B=B，∠C=C を用いて表せ。

【解答】（外心）$\cos A:\cos B:\cos C$

（重心）$\dfrac{1}{\sin A}:\dfrac{1}{\sin B}:\dfrac{1}{\sin \mathrm{C}}$

（垂心）$\dfrac{1}{\cos A}:\dfrac{1}{\cos B}:\dfrac{1}{\cos C}$

⑫発**-1-2**

△ABC において，BC=a，CA=b，AB＝c，面積を S，周の長さを $2s$ とする。外接円と内接円の半径をそれぞれ R，r とするとき，次の式が成立することを証明せよ。

(1) $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(2) $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

(1)

余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ から

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}$$

分子を因数に分解して

$$(2bc\sin A)^2=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$a+b+c=2s$ だから，$b+c-a=(a+b+c)-2a=2s-2a$ のようになり

$$(2bc\sin A)^2=16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$0°<A<180°$ だから　$\sin A>0$　　$bc\sin A=2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$T=\sqrt{\boldsymbol{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

(2)

正弦定理より $2R=\dfrac{a}{\sin A}$

△ABC の面積を S とすると

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$　∴　$\sin A=\dfrac{2S}{bc}$

∴　$R=\dfrac{abc}{4S}$

一方，$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$　∴　$r=\dfrac{2S}{a+b+c}$

∴　$\dfrac{r}{R}=\dfrac{8S^2}{abc(a+b+c)}$

ここで，ヘロンの公式から

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

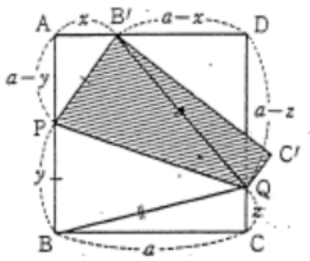
∴　$\dfrac{r}{R}=\dfrac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

⑫発**-1-3**

1辺a cmの正方形の紙ABCDを，Bが辺ADの上にくるように折り返すとき，折り返された部分の面積が最小になるのは，どんな折り方をした場合か。また，その場合の面積を求めよ。

指針 折り返された部分は，下の図のように台形で，その面積Sは

$$S=\frac{1}{2}BC(BP+CQ) \quad \cdots\cdots ①$$



文字使いケチケチするな――

B′の位置をきめるために　$AB'=x$

①にあらわれる各長さを

$BC=a,\quad BP=y,\quad CQ=z$

このx, y, zの関係が見つかればシメタもの.

答案 折り目をPQ，折り返した後のBの位置をB′とし

$AB'=x,\quad BP=y,\quad CQ=z$

とおくと，B, B′はPQについて対称だから　$BP=B'P,\quad BQ=B'Q$

$B'P^2=AB'^2+AP^2,\quad BQ^2=BC^2+CQ^2,\quad B'Q^2=DB'^2+DQ^2$

$y^2=x^2+(a-y)^2 \quad \cdots\cdots ①\qquad a^2+z^2=(a-x)^2+(a-z)^2 \quad \cdots\cdots ②$

①から　$y=\dfrac{x^2+a^2}{2a}$　　②から　$z=\dfrac{(a-x)^2}{2a}$

折り返された部分，台形PBCQの面積をSとすれば

$$S=\frac{a}{2}(y+z)=\frac{1}{4}\{x^2+a^2+(a-x)^2\}=\frac{1}{2}(x^2-ax+a^2)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3}{8}a^2$$

Sは$x=\dfrac{a}{2}$のとき最小値$\dfrac{3}{8}a^2$をとるから，折り返された部分の面積が最小になるのは，**BがADの中点にくるときで，その場合の面積は$\dfrac{3}{8}a^2$ cm²**

⑫発**-1-4**

円周率が3.05より大きいことを証明せよ。

半径1の円周の長さは2π

半径1の円に内接する正八角形の周の長さは，余弦定理により

$$8\sqrt{1^2+1^2-2\cdot 1\cdot \cos 45^\circ}=8\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

よって，半径1の円周の長さ＞半径1の円に内接する正八角形の周の長さ　より

$$2\pi>8\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\pi>4\sqrt{2-\sqrt{2}}=3.061\cdots\cdots$$　が成立■

【別解】

接線不等式$\cos x\geqq 1-\dfrac{x^2}{2}$に，$x=\dfrac{\pi}{6}$を代入すると，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\geqq 1-\dfrac{\pi^2}{72}$

よって，$\pi\geqq\sqrt{72-36\sqrt{3}}=3.105$　が成立■

⑫$\boxed{\text{発-1-5}}$

△ABC を鋭角三角形とし，その内角を A, B, C で表す。

(1)　$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ を証明せよ。

(2)　$P = \tan A + \tan B + \tan C$ とおくとき，P の最小値を求めよ。また，そのときの△ABC の形状を答えよ。

(1) 証　$C = 180° - (A + B)$ より，

$$\tan C = \tan\{180° - (A + B)\} = -\tan(A + B)$$ ←$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

$$\therefore \quad \tan C = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

この分母を払って整理すれば

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

が得られる。■

(2) 解　$\tan A$，$\tan B$，$\tan C > 0$ より，(2)で証明した不等式を用いると，

$$\tan A + \tan B + \tan C \geqq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \quad \cdots\cdots③$$

となり，$P = \tan A + \tan B + \tan C$ とおけば，(3)により，

$$P \geqq 3\sqrt[3]{P} \quad \cdots\cdots③'$$

$$\therefore \quad P^3 \geqq 27P$$

$$\therefore \quad P^2 \geqq 27 \qquad \therefore \quad P \geqq 3\sqrt{3} \quad \cdots\cdots④$$

が得られる。

④の等号は，③の等号が成り立つとき，すなわち

$$\tan A = \tan B = \tan C$$

$$\therefore \quad A = B = C = 60° \quad \cdots\cdots⑤$$

のときに限り成立するので，

$$P \text{ の最小値} = 3\sqrt{3}$$

である。

(3) 答　⑤から，△ABC は正三角形である。

⑫ $\boxed{\text{発}}$**-1-6**

原点を中心とする半径 1 の円 O の周上に定点 A と動点 P をとる。

(1)　円 O の周上の点 B，C で $PA^2+PB^2+PC^2$ が P の位置によらず一定であるようなものを求めよ。

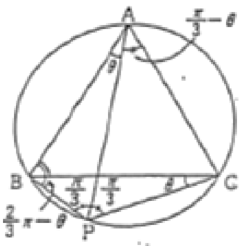
(2)　点 B，C が(1)の条件を満たすとき，PA＋PB＋PC の最大値と最小値を求めよ。

解答 (1) $PA^2+PB^2+PC^2=L$ とおく．P の位置によらず L が一定となるならば，特定の P の位置，たとえば P＝A，B，C のときの L の値は等しくなるので，

必要条件➡　$AB^2+AC^2=BA^2+BC^2=CA^2+CB^2$　∴　AB＝BC＝CA

である．逆にこのとき，つまり，△ABC が正三角形であるとき，L が一定となることを示そう．対称性により，点 P が劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上を動く場合だけに限定してよい．

∠PAB＝θ とおくと，∠ABP＝$\frac{2}{3}\pi-\theta$ となるので，△ABP に正弦定理を適用すると，



$$\frac{PA}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{PB}{\sin\theta}=2\quad\left(=\begin{matrix}\text{外接円}\\ \text{の直径}\end{matrix}\right)$$

$$\begin{cases} PA=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta & \cdots\cdots① \\ PB=2\sin\theta & \cdots\cdots② \end{cases}$$

となり，②で，θ の代りに $\frac{\pi}{3}-\theta$ とすれば，

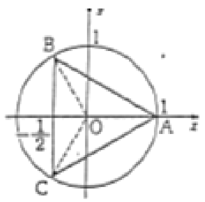
△APC で正弦定理➡　$PC=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$．　$\cdots\cdots③$

よって，

$$L=(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)^2+4\sin^2\theta+(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)^2$$
$$=6(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=6=\text{一定}.$$

ゆえに，A(1，0) のときの△ABC が正三角形となる点B，C の座標は

$$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{と}\ \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{である．}$$



(2) ①，②，③より，

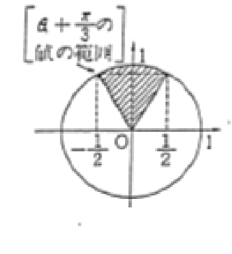
$$PA+PB+PC=2(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$$
$$=4\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad \text{⬅合成}$$
$$=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right).$$

ここで，θ の変域は $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であるので，

$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi$ となり，$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq1$．

よって，PA＋PB＋PC の

最大値＝4，　最小値＝$2\sqrt{3}$．



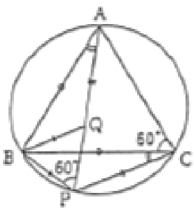
注 P が劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上にあるときは，

PB＋PC＝PA

が成り立ちます．証明は，①，②，③からも分かりますが，PA 上に AQ＝PC となる点Q をとれば，初等幾何的に示すこともできます．(右図で考えてみましょう．) すると，

PA＋PB＋PC＝2PA

となるので，その最大は P が A の反対側の点 (−1，0) に来たとき，最小は P が B または C に一致したときであることが分かります．



参考 (1)はベクトルを用いても解決します．原点に関する位置ベクトルを考えると，

$$PA^2+PB^2+PC^2=|\vec{p}-\vec{a}|^2+|\vec{p}-\vec{b}|^2+|\vec{p}-\vec{c}|^2$$
$$=3|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$
$$=6-2\vec{p}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

これが $\vec{p}$ によらず一定となる条件は　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$．

これは△ABC の重心が原点，すなわち△ABC の外心と一致することを示す．よって，△ABC は正三角形である．