

試験時間60分 解答は解答用紙に書いて、提出してください

- 1 関数 $y = \sin^3 2x$ を微分せよ。
- 2 $y = e^x \sin x$ とすると、 $y'' = \square$ である。
- 3 関数 $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ の導関数を求めよ。
- 4 x について微分可能な関数 y が条件 $x \tan y = 1$ を満たしているとき、 $\frac{dy}{dx}$ を x で表せ。
- 5 曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 5$ 上の点 $(1, 3)$ における接線の方程式を求めよ。
- 6 曲線 $y = x^{\sin x}$ 上で、 $x = \pi$ である点における接線の y 切片を求めよ。
- 7 t を媒介変数として、 $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t^2} \end{cases}$ で表される曲線を C とする。ここで、 e は自然対数の底である。
- (1) $\frac{dy}{dx}$ および $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の式で表せ。
- (2) 曲線 C 上の $t=1$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

8 2 曲線 $y = ax^3$ と $y = 3\log x$ が共有点を持ち、その点における 2 曲線の接線が一致しているとき、 a の値を求めよ。また、その共有点における接線の方程式を求めよ。ただし、 \log は自然対数である。

9 $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ ($-1 < x < 1$) とする。

- (1) $f(x)$ は奇関数であることを示せ。
- (2) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x}$ の値を求めよ。

10 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\sin x - x} = \boxed{}$$

11 数列 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$, $a_4 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}$, …… は漸化式

$a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしている。 $f(x) = (\sqrt{2})^x$ として、次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq 2$ における $f'(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (3) $0 < a_n < 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成立することを数学的帰納法を用いて示せ。
- (4) $0 < 2 - a_{n+1} < (\log 2)(2 - a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成立することを示せ。
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。