YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ⑫３ 二次関数

標準問題

【１】与式$=6\left(x+\dfrac{y-1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$より，

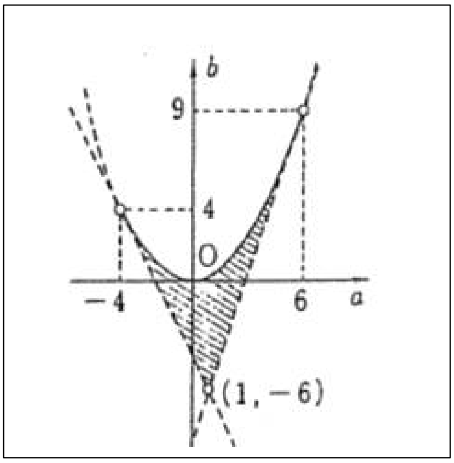
$x=y=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値$\dfrac{4}{3}$

【２】最小値$\begin{cases} f(-1)=4+2a & (a\leqq -3) \\ f\left(\frac{a}{3}\right)=-\dfrac{a^2}{3}+1 & (-3\leqq a\leqq 3) \\ f(1)=4-2a & (a\geqq 3) \end{cases}$，最大値$\begin{cases} f(1)=4-2a & (a\leqq 0) \\ f(-1)=4+2a & (a\geqq 0) \end{cases}$

【３】$\begin{cases} f(0)=a & (a\leqq 1) \\ f\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=2-\dfrac{1}{a} & (a\geqq 1) \end{cases}$

【４】$f(x,y)=(x-ky)^2+(1-k^2)y^2+(k-1)y+1$ より，　$-\dfrac{3}{5}\leqq k\leqq 1$

【５】$\begin{cases} f(-3)=9-3a+b>0 \\ f(2)=4+2a+b>0 \\ -3<-\dfrac{a}{2}<2 \\ f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=b-\dfrac{a^2}{4}\leqq 0 \end{cases}$ より，



【６】逆手法：$g(t)=2t^2-2xt+x^2-4=2\left(t-\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{x^2}{2}-4$とおく。

題意　⇔　$g(t)=0$ が$0\leqq t\leqq 2$に少なくとも１つ解を持つ

よって，（解の個数で場合分けして・・・）$-2\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$

【７】関数における文字置き換え＝合成関数

（1）　最大値７，最小値２　（2）　$x=1,\ 2\pm\sqrt{5}$

発展問題

1

$y^2=1-x^2 \geqq 0$　　∴　$-1 \leqq x \leqq 1$

$f(x)=y^2+2ax=-x^2+2ax+1=-(x-a)^2+a^2+1$

$a<-1$ のとき　最大値 $f(-1)=-2a$

$-1 \leqq a \leqq 1$ のとき　最大値 $f(a)=a^2+1$

$1<a$ のとき　最大値 $f(1)=2a$

2

解答　(Ⅰ)　$a=-1$ のとき

$f(x)=-2x+1$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で単調減少.

$$\therefore\quad m(-1)=f(1)=-1$$

(Ⅱ)　$a \neq -1$ のとき

$$f(x)=(a+1)\left(x-\frac{1}{a+1}\right)^2+1-\frac{1}{a+1}$$
$$=(a+1)\left(x-\frac{1}{a+1}\right)^2+\frac{a}{a+1}$$

(i)　$a>-1$ のとき，$\dfrac{1}{a+1}>0$

$\dfrac{1}{a+1}<1$ すなわち $a>0$ のとき，

$$m(a)=f\left(\frac{1}{a+1}\right)=\frac{a}{a+1}$$

$-1<a \leqq 0$ のとき $\dfrac{1}{a+1} \geqq 1$ で，$m(a)=f(1)=a$

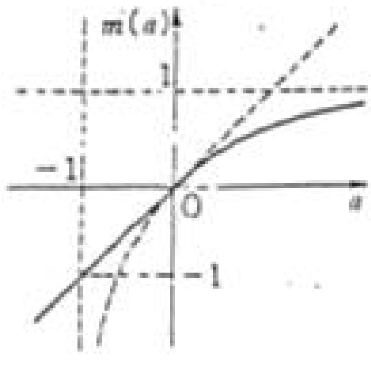
(ii)　$a<-1$ のとき，$\dfrac{1}{a+1}<0$

$$\therefore\quad m(a)=f(1)=a$$

(Ⅰ)，(Ⅱ)をまとめて

$$m(a)=\begin{cases} a & (a \leqq 0) \\ \dfrac{a}{a+1}\left(=1-\dfrac{1}{a+1}\right) & (a>0) \end{cases}$$

グラフは右図.



$\boxed{3}$

$\sin x = t$ とおくと

$-1 \leqq t \leqq 1$ で

$|\cos^2 x + a\sin x + b| \leqq 3$

より

$$|1 - t^2 + at + b| \leqq 3$$

$$\therefore\ -3 \leqq 1 - t^2 + at + b \leqq 3$$

したがって

$$f(t) = -t^2 + at + b + 1$$

とおけば，$-1 \leqq t \leqq 1$ において，つねに

$$-3 \leqq f(t) \leqq 3$$

が成り立つための a，b の条件を求めればよい。

$$f(t) = -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b + 1$$

より

(i) $\frac{a}{2} < -1$，すなわち，$a < -2$ のとき

$$\begin{cases} f(-1) = -1 - a + b + 1 \leqq 3 \\ f(1) = -1 + a + b + 1 \geqq -3 \end{cases}$$

$$\therefore\ -a - 3 \leqq b \leqq a + 3$$

(ii) $-1 \leqq \frac{a}{2} < 1$，すなわち，$-2 \leqq a < 2$ のとき

$$\begin{cases} \frac{a^2}{4} + b + 1 \leqq 3 \\ f(-1) = -1 - a + b + 1 \geqq -3 \\ f(1) = -1 + a + b + 1 \geqq -3 \end{cases}$$

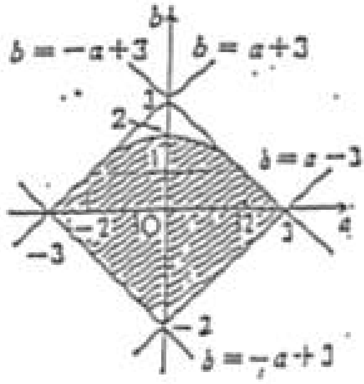
$$\therefore\ \begin{cases} b \leqq -\frac{1}{4}a^2 + 2 \\ b \geqq a - 3 \\ b \geqq -a - 3 \end{cases}$$

(iii) $\frac{a}{2} \geqq 1$，すなわち，$a \geqq 2$ のとき

$$\begin{cases} f(1) = -1 + a + b + 1 \leqq 3 \\ f(-1) = -1 - a + b + 1 \geqq -3 \end{cases}$$

$$\therefore\ a - 3 \leqq b \leqq -a + 3$$

(i)，(ii)，(iii) より，点 (a, b) の存在範囲は次図の斜線部分．ただし，境界も含む．



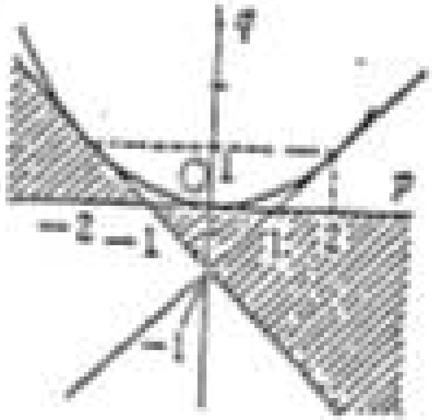
4

$\sin x = t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq \pi$ で

$0 \leqq t \leqq 1$ ……①

方程式は　$f(t) = t^2 + pt + q = 0$……②

(1)　① の区間に ② が実数解をもつ条件を求めることになる。



(i)　①の区間の内部にたかだか1つの解。

$f(0) \cdot f(1) \leqq 0$（当然 $D \geqq 0$）

∴　$q(p+q+1) \leqq 0$……③

(ii)　① の区間の内部に2つの解

$$\left.\begin{array}{l} p^2 - 4q \geqq 0, \\ f(0) = q > 0,\quad f(1) = p+q+1 > 0 \\ 0 < -\dfrac{p}{2} < 1 \quad \therefore\ -2 < p < 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots ④$$

③∪④を図示すると，斜線の部分となる。（境界をふくむ）

(2)　$t = \sin x = 1$ だけを $\left(x = \dfrac{\pi}{2}\right.$ だけを$\left.\right)$ 解として区間内にもち，他の1つの解は　$t < 0$ または　$1 < t$　にもつ場合である。

∴　$1 + p + q = 0$，かつ　$q < 0$　または

$1 \leqq -\dfrac{p}{2}$　　∴　$p \leqq -2$

すなわち $p + q + 1 = 0$ で $p \leqq -2$ または $p > -1$

過去問めぐり　(5)　$4 + 3\pi$　(6)　$-1 \leqq k \leqq \dfrac{1}{3}$