試験時間60分　　解答は<u>解答用紙</u>に書いて、提出してください

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=-x^2-ax+2a^2$ $(0\leqq x\leqq 1$，a は定数$)$ について，最大値が5となるとき，a の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 不等式 $kx^2+(2k-3)x+2k-1\geqq 0$ がすべての実数 x に対して成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 2次方程式 $-3x^2+2mx-1=0$ の2つの解をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$0<\alpha<1$ かつ $2<\beta<3$ となるような m の値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 2次関数 $y=x^2-2kx-k+6$ のグラフと x 軸の正の部分が異なる2点で交わるように，定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{5}$ 2次方程式 $mx^2-x-2=0$ の2つの実数解が，次の条件(＊)のようになるための m の条件を求めよ.

条件(＊)　2つの解の絶対値がともに1より小さい.

$\boxed{6}$ 2次方程式 $x^2-(8-a)x+12-ab=0$ がどんな a の値に対しても実数解をもつような定数 b の値の範囲を求めよ。

$\boxed{7}$ $f(x)=x+a$，$g(x)=x^2-x+2$ とする．次の条件が成り立つ a の値の範囲をそれぞれ求めよ.

(1)　$f(x)<g(x)$ が，ある実数 x に対して成り立つ.

(2)　$f(x)<g(x)$ が，すべての実数 x に対して成り立つ.

(3)　$f(x)>g(x)$ が，ある実数 x に対して成り立つ.

(4)　$f(x)>g(x)$ が，すべての実数 x に対して成り立つ.

$\boxed{8}$ 2次不等式 $2x^2+(4-7a)x+a(3a-2)<0$ の解がちょうど3個の整数を含むとき，正の定数 a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{9}$ x についての不等式 $x^2-(a+1)x+a<0, 3x^2+2x-1>0$ を同時に満たす整数 x がちょうど3つ存在するような定数 a の値の範囲を求めよ.

$\boxed{10}$ 不等式 $(x^2-2x-11)^2+4(x^2-2x)-76\leqq 0$ を満たす整数すべての積を求めよ。

$\boxed{11}$ 1から $10^5=100000$ までのすべての整数を，順に十進法で紙に書いたとすると，数字7を全部で $\boxed{}$ 回書くことになる。

$\boxed{1}$ 解答　$a=-\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\boxed{2}$ 解答　$k \geqq \frac{-2+\sqrt{13}}{2}$

$\boxed{3}$ 解答　$\frac{13}{4}<m<\frac{14}{3}$

$\boxed{4}$ 解答　$2<k<6$

$\boxed{5}$ 解答　(1)　$m>1$　　(2)　$0<m<3$　　(3)　$m>3$

$\boxed{6}$ 解答　$2 \leqq b \leqq 6$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　すべての実数　　(2)　$a<1$　　(3)　$a>1$　　(4)　ない

$\boxed{8}$ 解答　$\frac{5}{3}<a<2$，$2<a \leqq \frac{7}{3}$

$\boxed{9}$ 解答　$-5 \leqq a<-4, 4<a \leqq 5$

$\boxed{10}$ 解答　-360

$\boxed{11}$ 解答　50000

$\boxed{1}$ $f(x)=-x^2-ax+2a^2$ から　$f(x)=-\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}a^2$　$(0\leqq x\leqq 1)$

[1]　$-\dfrac{a}{2}\geqq 1$ すなわち $a\leqq{}^{ア}-2$ のとき

最大値は　$f(1)={}^{イ}2a^2-a-1$

[2]　$0<-\dfrac{a}{2}<1$ すなわち $-2<a<{}^{ウ}0$ のとき

最大値は　$f\left(-\dfrac{a}{2}\right)={}^{エ}\dfrac{9}{4}a^2$

[3]　$-\dfrac{a}{2}\leqq 0$ すなわち $a\geqq 0$ のとき

最大値は　$f(0)={}^{オ}2a^2$

[1]　$a\leqq -2$ のとき　$2a^2-a-1=5$ から　$2a^2-a-6=0$

よって　$(2a+3)(a-2)=0$　これを解くと　$a=-\dfrac{3}{2},\ 2$

これらは $a\leqq -2$ を満たさないから不適。

[2]　$-2<a<0$ のとき　$\dfrac{9}{4}a^2=5$　これを解くと　$a=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

$-2<a<0$ であるから　$a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

[3]　$a\geqq 0$ のとき　$2a^2=5$　これを解くと　$a=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$a\geqq 0$ であるから　$a=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

以上から　$a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{3},\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\boxed{2}$ $kx^2+(2k-3)x+2k-1\geqq 0$　……①

[1]　$k=0$ のとき，① は $-3x-1\geqq 0$ となる。

$x=0$ のとき，この不等式は成り立たない。

よって，条件を満たさない。

[2]　$k\neq 0$ のとき，$kx^2+(2k-3)x+2k-1=0$ の判別式を D とすると

$$D=(2k-3)^2-4k(2k-1)=-(4k^2+8k-9)$$

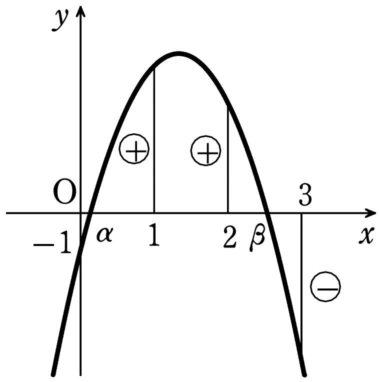
① がすべての実数 x に対して成り立つための条件は　$k>0,\ D\leqq 0$ である。

$D\leqq 0$ から　$4k^2+8k-9\geqq 0$　ゆえに　$k\leqq\dfrac{-2-\sqrt{13}}{2},\ \dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}\leqq k$

$k>0$ であるから　$k\geqq\dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}$

[1]，[2] から，求める k の値の範囲は　$k\geqq\dfrac{-2+\sqrt{13}}{2}$

$\boxed{3}$ $f(x)=-3x^2+2mx-1$ とする。



$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線で

$$f(0)=-1<0$$

よって，$f(x)=0$ の 2 つの解 α，β が $0<\alpha<1$，$2<\beta<3$ となるための条件は

$$f(1)>0 \text{ かつ } f(2)>0 \text{ かつ } f(3)<0$$

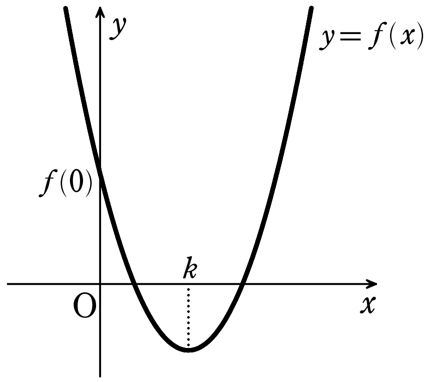
すなわち

$$2m-4>0 \text{ かつ } 4m-13>0 \text{ かつ } 6m-28<0$$

よって　　$m>2$ かつ $m>\dfrac{13}{4}$ かつ $m<\dfrac{14}{3}$

これらの共通範囲を求めて　　$\dfrac{13}{4}<m<\dfrac{14}{3}$

$\boxed{4}$ $f(x)=x^2-2kx-k+6$ とおく。



$f(x)=(x-k)^2-k^2-k+6$ から，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=k$ である。

よって，$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるための条件は，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(-k+6)>0$　……①

軸について　$k>0$　……②

$f(0)=-k+6>0$　……③

① から　　$k^2+k-6>0$　　　すなわち　　$(k-2)(k+3)>0$

ゆえに　　$k<-3$，$2<k$　……④

③ から　　$k<6$　……⑤

②，④，⑤ の共通範囲を求めて　　$2<k<6$

$\boxed{5}$ $f(x)=mx^2-x-2$ とおくと　$f(x)=m\left(x-\dfrac{1}{2m}\right)^2-\dfrac{1}{4m}-2$

$f(x)=0$ の判別式を D とすると　$D=1+8m$

また　$f(-1)=m-1$，$f(1)=m-3$

(1)　$m>0$ のとき　$D\geqq 0$，$\dfrac{1}{2m}>-1$，$f(-1)>0$ から　$m\geqq -\dfrac{1}{8}$，$m>-\dfrac{1}{2}$，$m>1$

よって　$m>1$

$m<0$ のとき　$D\geqq 0$，$\dfrac{1}{2m}>-1$，$f(-1)<0$ から　$m\geqq -\dfrac{1}{8}$，$m<-\dfrac{1}{2}$，$m<1$

これを満たす m の値は存在しない.

したがって　$m>1$

(2)　$m>0$ のとき　$f(1)=m-3<0$　　よって　$0<m<3$

$m<0$ のとき　$f(1)=m-3>0$　これを満たす m の値は存在しない.

よって　$0<m<3$

(3)　(1) の条件に加え，２つの解がともに１より小さくなることであるから

$m>0$ のとき　$D\geqq 0$，$\dfrac{1}{2m}<1$，$f(1)>0$　　よって　$m\geqq -\dfrac{1}{8}$，$m>\dfrac{1}{2}$，$m>3$

ゆえに　$m>3$　　(1) の $m>1$ とあわせて，求める m の条件は　$m>3$

$\boxed{6}$ 2 次方程式の係数について

$$D=\{-(8-a)\}^2-4\cdot 1\cdot(12-ab)=a^2+4(b-4)a+16$$

実数解をもつ条件は　$D\geqq 0$

すなわち

$$a^2+4(b-4)a+16\geqq 0 \ \cdots\cdots ①$$

がどんな a の値に対しても成り立つことである。

① の係数について

$$D_1=\{4(b-4)\}^2-4\cdot 1\cdot 16=16(b^2-8b+12)$$

① がどんな a の値に対しても成り立つための条件は，$D_1\leqq 0$ であるから

$$16(b^2-8b+12)\leqq 0$$

よって　$(b-2)(b-6)\leqq 0$

したがって　$2\leqq b\leqq 6$

$\boxed{7}$ (1)　$F(x)=g(x)-f(x)$ とすると

$$F(x)=x^2-x+2-(x+a)=x^2-2x+2-a=(x-1)^2+1-a$$

「$f(x)<g(x)$ が，ある実数 x に対して成り立つ」

$\Longleftrightarrow$「$F(x)>0$ を満たす実数 x がある」

これは任意の実数 a に対して成り立つ.

したがって，a の値の範囲はすべての実数.

(2)　「$f(x)<g(x)$ が，すべての実数 x に対して成り立つ」

$\Longleftrightarrow$「すべての実数 x に対して $F(x)>0$」$\Longleftrightarrow$ $\{F(x)$ の最小値$\}>0$

$F(x)$ は $x=1$ のとき最小値 $1-a$ をとるから　$1-a>0$

したがって　$a<1$

(3)　「$f(x)>g(x)$ が，ある実数 x に対して成り立つ」

$\Longleftrightarrow$「$F(x)<0$ を満たす実数がある」$\Longleftrightarrow$ $\{F(x)$ の最小値$\}<0$

よって　$1-a<0$

したがって　$a>1$

(4)　「$f(x)>g(x)$ が，すべての実数 x に対して成り立つ」

$\Longleftrightarrow$「すべての実数 x に対して　$F(x)<0$」

これはどのような実数 a に対しても成り立たない.

したがって，a の値の範囲はない.

$\boxed{8}$ 左辺を因数分解して　$(2x-a)\{x-(3a-2)\}<0$

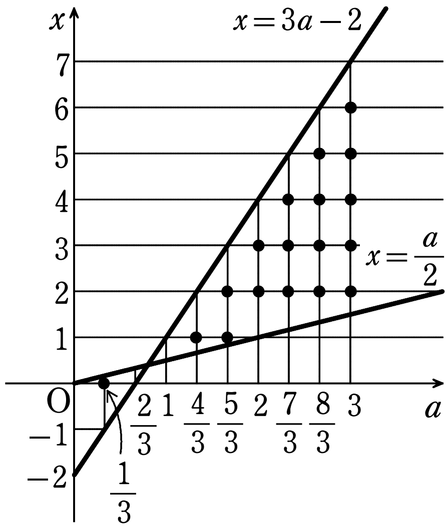
この不等式の解は，$\dfrac{a}{2}>3a-2$ すなわち $0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき

$$3a-2<x<\frac{a}{2}\quad\cdots\cdots①$$

$\frac{a}{2}=3a-2$ すなわち $a=\frac{4}{5}$ のとき　解なし

$\frac{a}{2}<3a-2$ すなわち $a>\frac{4}{5}$ のとき　$\frac{a}{2}<x<3a-2$ ……②

$a>0$ における，$x=\frac{a}{2}$，$x=3a-2$ のグラフは右の図のようになる。



図から，① を満たす整数 x は 2 個以下である。

また，② を満たす整数 x がちょうど 3 個になる

条件は　$\frac{5}{3}<a<2,\ 2<a\leqq\frac{7}{3}$

したがって，求める a の値の範囲は

$$\frac{5}{3}<a<2,\ 2<a\leqq\frac{7}{3}$$

$\boxed{9}$ $x^2-(a+1)x+a<0$ から $(x-a)(x-1)<0$ ……①

また $3x^2+2x-1>0$ から $(3x-1)(x+1)>0$　ゆえに　$x<-1,\ \frac{1}{3}<x$

[1]　$a>1$ のとき．① から $1<x<a$ であるから，整数 x は $x=2, 3, 4$ である．

よって　$4<a\leqq5$

[2]　$a=1$ のとき．① から解なし．

[3]　$a<1$ のとき．① から $a<x<1$ であるから，整数 x は $x=-4, -3, -2$ である．

よって　$-5\leqq a<-4$

[1]〜[3] から $-5\leqq a<-4,\ 4<a\leqq5$

$\boxed{10}$ $x^2-2x=X$ とすると　$(X-11)^2+4X-76\leqq0$

よって　$X^2-18X+45\leqq0$

すなわち　$(X-3)(X-15)\leqq0$　ゆえに　$3\leqq X\leqq15$

すなわち　$3\leqq x^2-2x\leqq15$　したがって　$4\leqq(x-1)^2\leqq16$

これを満たす整数 x は　$-3,\ -2,\ -1,\ 3,\ 4,\ 5$

これらの積は　-360

$\boxed{11}$ 一の位，十の位，百の位，千の位，万の位で，それぞれ 10^4 回ずつ 7 を書くから，全部で $10^4\times5=50000$ (回) 書くことになる。