数学Ⅲの極限

lim ではまず，不定形を確認する

$$\frac{1}{\infty}=0,\quad \frac{1}{\pm 0}=\pm\infty$$

$$\infty+\infty=\infty$$

$$\infty\times\infty=\infty$$

（1）　$\dfrac{0}{0}$　⇒　約分，公式，微分の定義

（2）　$\dfrac{\infty}{\infty}$　⇒　次数の比較，指数の底の比較

（3）　$\infty-\infty$　⇒　別の形へ

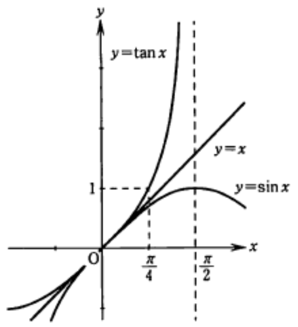
（4）　$0\times\infty$　⇒　別の形へ

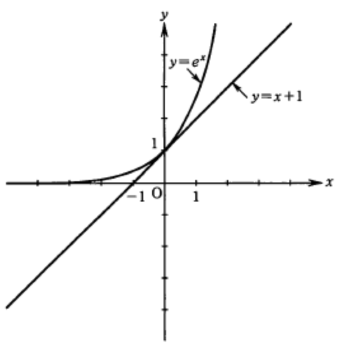
（5）　$(1+0)^{\infty}$　⇒　e の定義へ

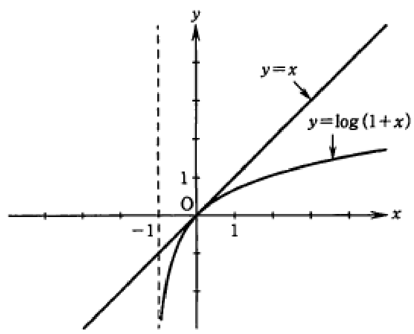
○$\dfrac{0}{0}$ の極限公式

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\qquad \lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1\qquad \boxed{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$







○不等式＋極限⇒はさみうちの原理

（例）$[x]\leq x<[x]+1$ の利用

○右極限・左極限の区別

○無限級数＝第 n 部分和の極限

○連続，微分可能の定義

$f(x)$ が $x=a$ で連続　⇔　$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)$

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能　⇔　$\displaystyle\cancel{f'(a)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$　が収束

○微分可能⇒連続

○無限大のオーダー

○ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束　$\Rightarrow$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

（対偶）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$　$\Rightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

（逆は偽である）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$　$\not\Rightarrow$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束

【反例】$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$

○平均値の定理

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能のとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),\quad a < c < b \text{ となる } c \text{ が存在する。}$$

○ロピタルの定理（l'Hospital's rule）ベルヌーイの定理（Bernoulli's rule）

$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$　または　$\dfrac{\infty}{\infty}$　のとき，

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

○接線不等式

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin x < x < \tan x$

$e^x \geq x + 1$

$\log x \leq x - 1$

○極限と融合される図形問題

和と差で sin，スキマで tan，「車輪の下」（ヘルマン・ヘッセ）

極限と命題

【例題 01】

次の命題が真であるか偽であるかをいえ。ただし，真のときは証明し，偽のときは反例をあげよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

(2)　数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

【例題 02】

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，次の命題の真偽をいえ。ただし，真のときは証明し，偽のときは反例をあげよ。

(1)　$\{a_n+b_n\}$ と $\{a_n\}$ が収束するならば，$\{b_n\}$ も収束する

(2)　$\{a_n{}^2\}$ が収束するならば，$\{a_n\}$ も収束する

談話室マロニエ　数学 QUIZ　極限

A 問題

$\boxed{\text{lim ではまず，不定形を確認する}}$

（1）　$\dfrac{0}{0}$　⇒　$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$

（2）　$\dfrac{\infty}{\infty}$　⇒　$\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$　（無限大のオーダー）

（3）　$\infty-\infty$　⇒　別の形へ

（4）　$0\times\infty$　⇒　別の形へ

（5）　$(1+0)^{\infty}$　⇒　$\boxed{\text{カ}}$へ

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型，}(1+0)^{\infty}\text{型の極限公式をすべて挙げよ。}}$（また，その関連性を考えてみよ）

$\boxed{\text{キ}}$　　$\boxed{\text{ク}}$　　$\boxed{\text{ケ}}$

$\boxed{\text{コ}}$　　$\boxed{\text{サ}}$　　$\boxed{\text{シ}}$ ⇔ $\boxed{\text{ス}}$

$\boxed{\text{微分係数の定義，導関数の定義を述べよ。}}$ $\boxed{\text{セ}}$

不等式＋極限⇒$\boxed{\text{ソ}}$　（例）$[x] \leq x < [x]+1$ の利用

$\boxed{\text{右極限・左極限}}$の区別

$\boxed{\text{無限級数}}$＝$\boxed{\text{タ}}$の$\boxed{\text{チ}}$　とくに無限等比級数なら公式がある。これを述べよ。$\boxed{\text{ツ}}$

$\boxed{\text{連続，微分可能の定義}}$

$f(x)$ が $x=a$ で$\boxed{\text{連続}}$ ⇔ $\boxed{\text{テ}}$

$f(x)$ が $x=a$ で$\boxed{\text{微分可能}}$ ⇔ $\boxed{\text{ト}}$

$\boxed{\text{微分可能⇒連続}}$　これを証明せよ。$\boxed{\text{ナ}}$

$\boxed{\text{無限大のオーダー}}$ $\boxed{\text{ニ}}$

$\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

（対偶）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

（逆は偽である）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束

これの反例を挙げよ。$\boxed{\text{ヌ}}$

$\boxed{\text{平均値の定理}}$

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能のとき，

$\boxed{\text{ネ}}$ となる c が存在する。

$\boxed{\text{ロピタルの定理}}$（l'Hospital's rule）

$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$　または　$\dfrac{\infty}{\infty}$　のとき，

$\boxed{\text{ノ}}$

$\boxed{\text{接線不等式}}$

$\boxed{\text{ハ}}$, $\boxed{\text{マ}}$, $\boxed{\text{ヤ}}$,

$\boxed{\text{極限と融合される図形問題}}$

和と差で sin，スキマで tan，「車輪の下」（ヘルマン・ヘッセ）

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 数Ⅲ極限篇

標準問題篇演習

③標-1-1演習

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left\{\log(x+2)-\log x\right\}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

③標-1-2演習

次の関係が成立するような定数 a, b, c の値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty} x\left\{\sqrt{x^2+3x+1}-(ax+b)\right\}=c$$

③標-1-3演習

次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x}\right]}{x}$$

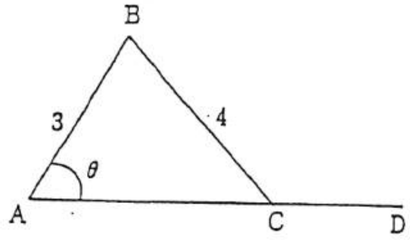
③標-1-4演習

次の極限の収束・発散を調べよ。

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$$

③標-1-5

右図において，$\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BC}=4,\ \mathrm{AD}=7$ で，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさ θ が変化するにしたがって点C は AD 上を動く。$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{CD}}{\theta^2}$ を求めよ。



③標-1-6

面積 1 の正 n 角形 $(n\geq 3)$ の周の長さを $L(n)$ とする。$L(n)$ を n の式で表し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L(n)$ を求めよ。

③標-1-7

次の関数 $y=f(x)$ のグラフをかき，その連続性を調べよ。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+2x+1}{x^{n-1}+1}$$

③標-1-8

$\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ がすべての x で連続であるとき，a,b の値を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-9}}$

無限級数 $x+x\left(x^2-x+1\right)+x\left(x^2-x+1\right)^2+\cdots\cdots+x\left(x^2-x+1\right)^{n-1}+\cdots\cdots$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。さらに，この級数の和を $f(x)$ とするとき，$f(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-10}}$

xy 平面に直線 $l: y=(\tan 2\theta)x$ がある。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。点 $(1, 0)$ を通り x 軸と l に接する円を C_1，C_1 の左側にあって l と x 軸と C_1 に接する円を C_2，C_2 の左側にあって l と x 軸と C_2 に接する円を C_3，以下同様に，C_k の左側にあって l と x 軸と C_k に接する円を C_{k+1} とする。円 C_k の面積を S_k とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-11}}$

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，次の極限値を求めよ。ただし，n は正の整数とし，$a \neq 0$ とする。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n f(x)-a^n f(a)}{x^n-a^n}$$

③$\boxed{\text{標-1-12}}$

関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases} x\left(\dfrac{1}{2}-x\sin\dfrac{1}{x}\right) & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ と定義する。

（1）$f'(x)$ を求めよ。

（2）$f'(x)$ の連続性を求めよ。

③$\boxed{\text{標-1-13}}$

関数$f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}$　$(x>0)$に対して，漸化式

$$a_1=2,\ a_{n+1}=f\left(a_n\right)\quad(n\geqq 1)$$

によって，数列$\left\{a_n\right\}$を定める。また，方程式$x=f(x)$の解をαとする。

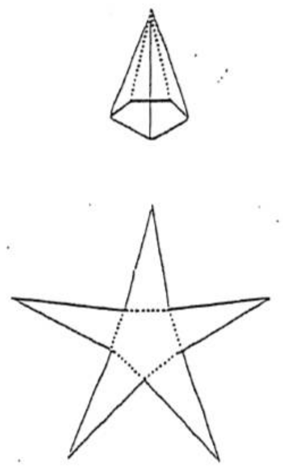
（1）$a_n\geqq\alpha$　$\left(n=1,2,3,\cdots\cdots\right)$を示せ。

（2）$a_{n+1}-\alpha\leqq\dfrac{1}{2}\left(a_n-\alpha\right)$　$\left(n=1,2,3,\cdots\cdots\right)$を示せ。

（3）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

発展問題

③発-1-1



$n \geq 3$ とし，正 n 角すいの表面を，底面に含まれない n 個の辺で切り開いて得られる展開図を考える。正 n 角すいの頂点は，展開図においては，異なる n 個の点になっている。ここでは，これらの n 個の点を通る円の半径が 1 であるような，正 n 角すいのみを考えることにする。

(1)　各 n に対して，このような正 n 角すいの体積の最大値 v_n を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} v_n$ を求めよ。

（注）図は，$n=5$ の場合の正 n 角すいとその展開図の例である。

③発-1-2**LTC**

n を自然数とする。半径 $\dfrac{1}{n}$ の円を互いに重なり合わないように半径 1 の円に外接させる。このとき，外接する円の最大個数を a_n とする。$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$ を求めよ。

③発-1-3**LTC**

$OA_1 = OB = 1$, $\angle B_1OA_1 = \theta \ (0 < \theta < \pi)$ であるような二等辺三角形 $O_1A_1B_1$ がある。

辺 A_1B_1 の中点を B_2 とし，辺 OA_1 上に $OA_2 = OB_2$ となる点 A_2 をとり，二等辺三角形 OA_2B_2 をつくる。以下同様にして，$n > 2$ についても二等辺三角形 OA_nB_n を作っていく。

辺 OA_n の長さを a_n とおく。

(1)　$a_3 \cdot \sin\dfrac{\theta}{4}$ を計算せよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を計算せよ。

③発-1-4

半径１の円に内接する$3n$個の半径の等しい円を図１のように描く。さらに図２のように$3n$個の小さな半径の等しい円を描く。この操作を無限に繰り返したとき，$3n$個ずつ次々に描かれる円の面積の総和S_nと，それらの円の円周の長さを総和C_nを求めよ。ただし，$n \geqq 2$とする。

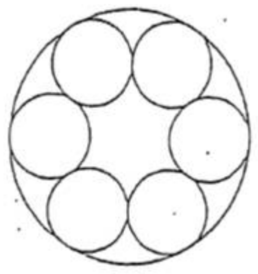


図1　図2

③発-1-5

$-\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，無限級数

$$\sin^2 x + \sin^2 x \cos^3 x + \sin^2 x \cos^6 x + \cdots\cdots + \sin^2 x \cos^{3(n-1)} x + \cdots\cdots$$

の和を$f(x)$とする。

$f(x)$の増減を調べ，$y=f(x)$のグラフを描け。

③発-1-6**LTC**

関数$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3^{n-1}a+bx-cx^n}{1+3^{n-1}+x^{n-1}}$は実数全体で定義され，かつ$f(-3)=3$である。ただし，$n$は自然数とする。

(1)　a, b, cの値を求めよ。

(2)　関数$y=f(x)$のグラフをかけ。

③ 発-1-7 演習添削

２つの級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ がそれぞれ和 A, B を持つとき，次の問いに答えよ。ただし，$a_1 = 1$ とする。

(1)　$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n + a_{n+1})$ を A, B で表せ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 (a_n - a_{n+1})$ を A, B で表せ。

③ 発-1-8

$f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi \cos x$ について次の問いに答えよ．

(1) $x = f(x)$ はただ１つの解を持つことを示せ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 0$，$x_{n+1} = f(x_n)$（$n \geqq 1$）で定めるとき，$\{x_n\}$ が収束することを示し $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ

③$\boxed{\text{発-1-9}}$

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ は第 2 次導関数をもち，つねに $f'(x) \neq 0$ を満たすとする．また，方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解 α をもつとする．

$F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ とおく．

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線と x 軸との交点を $(x_{n+1},\ 0)$ とする．このとき，$x_{n+1} = F(x_n)$（$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ が成り立つことを示せ.）

(2) すべての実数 x に対して $|f(x)f''(x)| \leqq M\{f'(x)\}^2$ を満たす定数 M（$M \geqq 0$）が存在するとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqq M|x - \alpha| \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(3) 定数 M が 1 より小さいとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ となることを示せ．