２次の道具

$\boxed{\text{平方完成}}$

↓

$\boxed{\text{解の公式}}$

↓

$\boxed{\text{判別式}}$（解の公式のルート内）

↓

$\boxed{\text{解と係数の関係}}$

$1\cdot x^2 -(\text{解の和})x+(\text{解の積})=0$

２次方程式の解の配置問題

解　⇔　グラフの共有点　に対応して
判別式，軸，端点　の条件を考える

（注）一区間一解なら端点のみ，一区間二解ならＤ軸端点すべて。

【例題】

方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$ の 2 つの実数解の少なくとも 1 つが $-2<x<0$ の範囲にあるような定数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

最大最小問題
⇒候補を絞ってグラフで整理

【例題 01】

$0 \leqq x \leqq 1$ であるとき，$y=x^2+ax+2$ の最小値を $m(a)$，最大値を $M(a)$ とする。

（１）$m(a)$ を求めよ。

（２）$M(a)$ を求めよ。

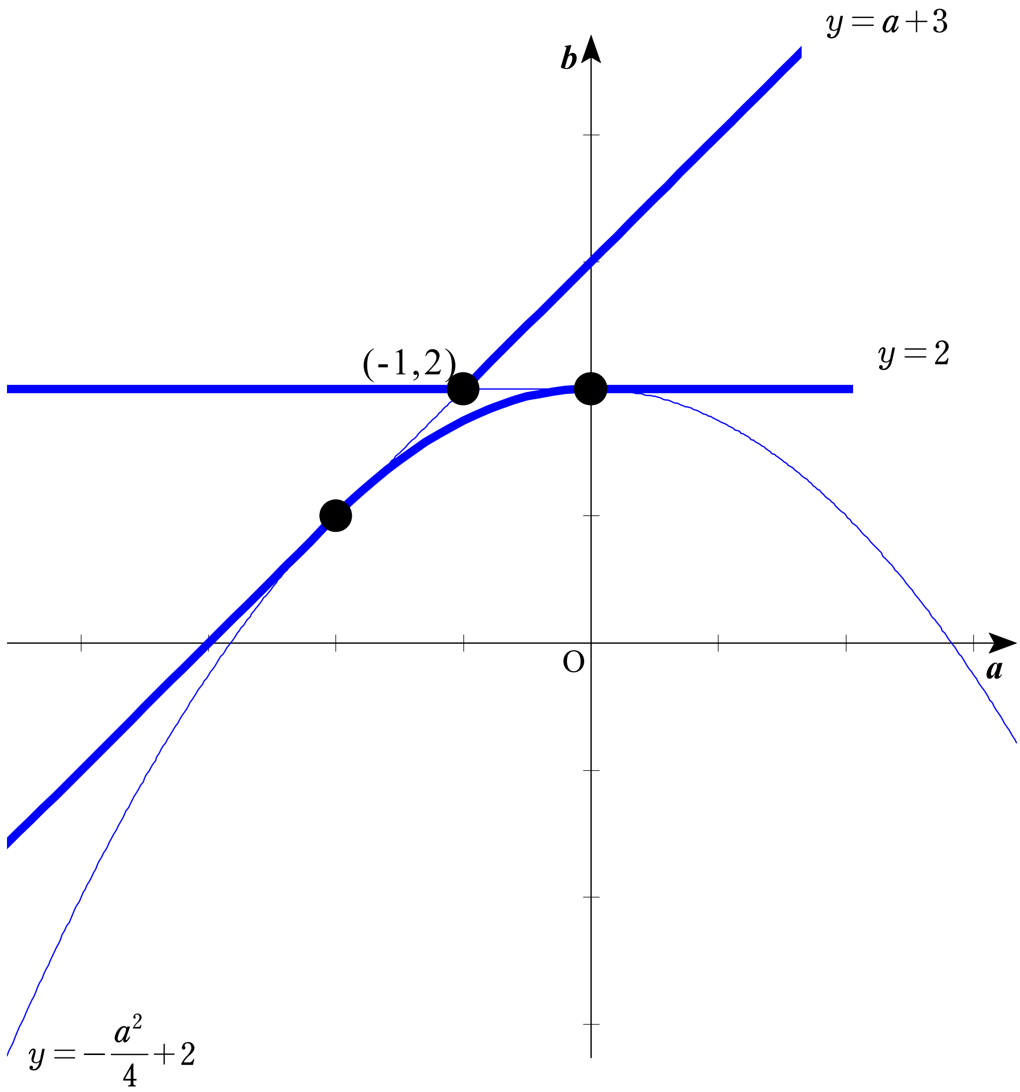
【解答】

最小値の候補は，

$$\begin{cases} \text{変域内の軸}\quad y=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+2,\ \text{ただし，}0\leqq-\dfrac{a}{2}\leqq1\ \text{つまり}-2\leqq a\leqq0\ \text{のときのみ} \\ \text{左端}\quad y=f(0)=2,\ \text{右端}\quad y=f(2)=a+3 \end{cases}$$

これらを ab 平面に図示し，最小のものを拾う。

最大値の候補は両端のみ。ここから最大のものを拾う。



関数の最大最小　二次関数に限らない一般論

基礎　グラフを描いて高さ比べ

２次関数⇒平方完成
三角関数⇒諸公式の利用
一般には⇒微分

応用　２変数以上 or 整式(n次式)でないとき　など

（1）$\boxed{\text{一文字消去}}$（ただし変域に注意）

（2）$\boxed{\text{図示}}$して共有点の存在条件に帰着（線形計画法）

（3）$\boxed{\text{文字の置き換え（変域に注意）}}$

（対称式は和と積で，$x=\frac{b}{a}$など）

（注）和と積の置き換えでは隠れた実解条件に注意

$\boxed{\text{パラメーター表示}}$（円・だ円・双曲線など）

$x^2+y^2=r^2$ のとき，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と表せる。（２変数⇒１変数）

（4）$\boxed{\text{有名不等式の利用}}$

（例）相加相乗，Cauchy-Schwarz の不等式など

相加相乗　$a>0, b>0$ のとき，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成立　（等号成立は $a=b$）

CS-不等式　$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 \geqq \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$　（等号成立は $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ のとき）

三角不等式　$\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \geqq \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$　（等号成立は $\vec{a}, \vec{b}$ が同じ向きのとき）

（5）$\boxed{\text{逆手法}}$（主役交代して，解の存在条件に帰着）

（6）（最後の手段）$\boxed{\text{一文字固定}}$

【例題 02】$x^2+y^2=2$ のもとで，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。（できるだけ多くの解法で解け）

【例題 03】正の数 a, b が $a^3+b^3=5$ を満たすとき，$a+b$ のとりうる値の範囲を求めよ。（2012 昭和）

談話室マロニエ　数学 QUIZ　２次関数
（２次関数に限らず、関数の一般論を含む）

A 問題

２次関数のグラフの描き方　⇒　平方完成して，$\boxed{\text{ア}}$を求める。
上に凸か下に凸かは２次の係数の符号による。

２次の道具　①平方完成，②解の公式，③判別式，④解と係数の関係
解の公式の証明のポイントは，$\boxed{\text{イ}}$である。

x の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$\boxed{\text{ウ}}$である。
x の２次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，$\boxed{\text{エ}}$である。
この上で，２次方程式の判別式の作り方は，$\boxed{\text{オ}}$を抜き出せばよい。

B 問題

２次関数の最大・最小
下に凸の最小　⇒　場合分けのポイントは，$\boxed{\text{カ}}$である。
下に凸の最大　⇒　場合分けのポイントは，$\boxed{\text{キ}}$である。

最大最小の候補は，$\boxed{\text{ク}}$である。

一般に，関数の最大最小　⇒　グラフの y 座標比べ
方程式の解　⇒　グラフの交点の x 座標
不等式（大小関係）⇒　グラフの上下関係

C 問題

最大最小問題
（基本）２次関数なら$\boxed{\text{平方完成}}$，三角関数なら$\boxed{\text{ケ}}$など，一般には$\boxed{\text{コ}}$
（応用）① $\boxed{\text{サ}}$
② $\boxed{\text{シ}}$
③ $\boxed{\text{ス}}$
④ $\boxed{\text{セ}}$
⑤ $\boxed{\text{ソ}}$
⑥ $\boxed{\text{タ}}$

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより

標準問題

①標-1-1

x, y の関数 $f(x, y) = 6x^2 + 6xy + 3y^2 - 6x - 4y + 3$ の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。

①標-1-2

関数 $f(x) = 3x^2 - 2ax + 1$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値，最小値をそれぞれ求めよ。

①標-1-3 **（LTC）**

x の関数 $f(x) = ax^2 - 2(a-1)x + a$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ。

①標-1-4

すべての実数 x, y に対して，$x^2 - 2kxy + y^2 + (k-1)y + 1 \geqq 0$ が成り立つような定数 k の範囲を求めよ。

①標-1-5

実数係数の２次方程式 $x^2+ax+b=0$ の２解がともに $-3<x<2$ にあるための $a,\ b$ についての条件を求め，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。

①標-1-6 **（LTC）**

実数 t が $0\leqq t\leqq 2$ を満たすとき，２次方程式 $x^2-2tx+2t^2-4=0$ の実数解 x のとり得る値の範囲を求めよ。

①標-1-7 **（LTC）**

$f(x)=|x^2-3x|-x+2$ とする。

(1)　x の関数 $f(f(x))$ の $2\leqq x\leqq 4$ における最大値および最小値を求めよ。

(2)　x の方程式 $f(f(x))=-1$ を解け。

発展問題

①発-1-1

実数x, yが$x^2+y^2=1$を満たすとき，y^2+2axの最大値と最小値を求めよ。

①発-1-2

xを変数とする関数を$f(x)=(a+1)x^2-2x+1$とする。$0 \leqq x \leqq 1$の範囲でこの関数の最小値は，aの関数の最小値は，aの関数で表される。これを$m(a)$とする。$m(a)$を求め，このグラフをかけ。

①$\boxed{\text{発-1-3}}$

$\left|\cos^2 x+a\sin x+b\right|\leqq 3$ がすべての実数 x について成り立つような，点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

①$\boxed{\text{発-1-4}}$

$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，方程式 $\sin^2 x+p\sin x+q=0$ が実数解をもつための $(p,\ q)$ の存在領域を図示せよ。

過去問めぐり

【１】2018 福岡大学・医 **難**

(iii)　$-1-\sqrt{2}\leqq x\leqq 1+\sqrt{2}$ を満たす全ての x に対して $bx^2-2ax-b-4\leqq 0$ が成立する。このとき，a と b が満たす連立不等式によって表される領域の面積は $\boxed{\ (5)\ }$ であり，この領域内において $k=\dfrac{b+2-\sqrt{2}}{a+3\sqrt{2}}$ がとりうる値の範囲は $\boxed{\ (6)\ }$ である。