試験時間60分　　解答は解答用紙に書いて、提出してください

1　鉛筆が435本，ノートが268冊ある。何人かの子どもに，鉛筆もノートもそれぞれ均等に，できるだけ多く配ったところ，鉛筆が45本，ノートが34冊余った。子どもの人数を求めよ。

2　$\dfrac{6n^2+11n+38}{3n-2}$ が整数となるような最大の自然数 n を求めよ。

3　m を正の整数とする。$P=m^3-4m^2-4m-5$ が素数となるとき，P の値を求めよ。

4　$x^3+y^3-2x^2y=1$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ．

5　$5x^2+2xy+y^2-4x+4y+7=0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ を求めよ．

6　$0<x\leqq y\leqq z$ である整数 x，y，z について

(1)　$xyz+x+y+z=xy+yz+zx+5$ を満たす整数 x，y，z をすべて求めよ．

(2)　$xyz=x+y+z$ を満たす整数 x，y，z をすべて求めよ．

7　a を正の奇数とする。次の (A)，(B) を満たす整数 b，c の組がちょうど3つ存在するような最小の a を求めよ。

(A)　a，b，c は直角三角形の3辺の長さである。

(B)　$a<b<c$

8　実数 x に対して x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す．例えば $[\sqrt{2}]=1$，$[-1.3]=-2$ である．

(1)　$\left[\dfrac{1}{3}x+1\right]=-2$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

(2)　$\left[\dfrac{1}{6}x\right]=\left[\dfrac{1}{2}x+1\right]$ を満たす x について考える．$\left[\dfrac{1}{6}x\right]=\left[\dfrac{1}{2}x+1\right]=k$ とおく．

$\left[\dfrac{1}{6}x\right]=k$ から $^{ア}\boxed{}\leqq x<{}^{イ}\boxed{}$ ……①

であり，また $\left[\dfrac{1}{2}x+1\right]=k$ から $^{ウ}\boxed{}\leqq x<{}^{エ}\boxed{}$ ……②

である．x の範囲①，②が共通部分をもつのは $k={}^{オ}\boxed{}$ のときのみであるから，

$\left[\dfrac{1}{6}x\right]=\left[\dfrac{1}{2}x+1\right]$ を満たす x の値の範囲は $^{カ}\boxed{}\leqq x<{}^{キ}\boxed{}$ である．

$\boxed{1}$ 解答　78 人

$\boxed{2}$ 解答　$n=6$

$\boxed{3}$ 解答　$P=43$

$\boxed{4}$ 解答　$(x,\ y)=(-3,\ -2),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (2,\ 1)$

$\boxed{5}$ 解答　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 5),\ (2,\ 3,\ 3)$　　(2)　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

$\boxed{7}$ 解答　15

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$-9 \leqq x < -6$　　(2)　(ア)　$6k$　　(イ)　$6k+6$　　(ウ)　$2k-2$　　(エ)　$2k$
(オ)　-1　　(カ)　-4　　(キ)　-2

1　子どもに配った鉛筆の本数とノートの冊数は，それぞれ　$435-45=390$（本），
$268-34=234$（冊）である。
よって，子どもの人数は，390 と 234 の公約数のうち，45 より大きい数である。
$390=2\cdot3\cdot5\cdot13$，$234=2\cdot3^2\cdot13$ であるから，390 と 234 の最大公約数は　$2\cdot3\cdot13=78$
78 の約数のうち，45 より大きい数は 78 である。
したがって，求める子どもの人数は　78 人

2　$\dfrac{6n^2+11n+38}{3n-2}=\dfrac{(3n-2)(2n+5)+48}{3n-2}=2n+5+\dfrac{48}{3n-2}$　……①
よって，$\dfrac{6n^2+11n+38}{3n-2}$ が整数となるためには，$3n-2$ が 48 の約数であることが必要である。
$3n-2\geqq1$ であるから　$3n-2=48,\ 24,\ 16,\ 12,\ 8,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$
よって　$n=\dfrac{50}{3},\ \dfrac{26}{3},\ 6,\ \dfrac{14}{3},\ \dfrac{10}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 2,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{4}{3},\ 1$
ゆえに，① が整数となる最大の自然数 n は　$n=6$

3　$P=m^3-4m^2-4m-5$ から　$P=(m-5)(m^2+m+1)$　……①
m が正の整数であることから，$m-5$，m^2+m+1 も整数であり
$$m-5\geqq-4,\quad m^2+m+1\geqq3$$
よって，P が素数であるとき，① より　$m-5=1$，$m^2+m+1=P$
これを解くと　$m=6$，$P=43$
このとき，P は確かに素数となる。
よって　$P=43$

4　(左辺) $=x^3-x^2y+y^3-x^2y$
$=x^2(x-y)+y(y^2-x^2)=(x-y)(x^2-xy-y^2)$
よって　$(x-y)(x^2-xy-y^2)=1$
x，y は整数であるから
[1] $\begin{cases}x-y=1 & \cdots\cdots ①\\ x^2-xy-y^2=1 & \cdots\cdots ②\end{cases}$　または　[2] $\begin{cases}x-y=-1 & \cdots\cdots ③\\ x^2-xy-y^2=-1 & \cdots\cdots ④\end{cases}$
[1]　① から　$x=y+1$
② に代入して　$(y+1)^2-(y+1)y-y^2=1$
よって　$y^2-y=0$ から　$y(y-1)=0$　ゆえに　$y=0,\ 1$
$y=0$ のとき　$x=1$，　$y=1$ のとき　$x=2$
[2]　③ から　$x=y-1$
④ に代入して　$(y-1)^2-(y-1)y-y^2=-1$
よって　$y^2+y-2=0$ から　$(y+2)(y-1)=0$　ゆえに　$y=-2,\ 1$
$y=-2$ のとき　$x=-3$，　$y=1$ のとき　$x=0$
以上から　$(x,\ y)=(-3,\ -2),\ (0,\ 1),\ (1,\ 0),\ (2,\ 1)$

$\boxed{5}$ 左辺を y について整理すると　$y^2+2(x+2)y+5x^2-4x+7=0$ …… ①

y は整数であるから，判別式 D について，$D \geqq 0$ であることが必要.

$\dfrac{D}{4}=(x+2)^2-(5x^2-4x+7) \geqq 0$

すなわち　$4x^2-8x+3 \leqq 0$

よって　$(2x-1)(2x-3) \leqq 0$

ゆえに　$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$　　これを満たす整数 x は　$x=1$

このとき，① は　$y^2+6y+8=0$

ゆえに　$(y+2)(y+4)=0$　　よって　$y=-2,\ -4$

したがって　$(x,\ y)=(1,\ -2),\ (1,\ -4)$

$\boxed{6}$ (1)　$xyz-(xy+yz+zx)+x+y+z=5$ から

$(x-1)(y-1)(z-1)=4$

また，$x,\ y,\ z$ は，整数で $0<x \leqq y \leqq z$ であるから

$0 \leqq x-1 \leqq y-1 \leqq z-1$

ゆえに　$(x-1,\ y-1,\ z-1)=(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 2,\ 2)$

すなわち　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 2,\ 5),\ (2,\ 3,\ 3)$

(2)　$0<x \leqq y \leqq z$ であるから　$xyz=x+y+z \leqq 3z$

ゆえに　$xy \leqq 3$

よって　$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$

与式から　$(x,\ y)=(1,\ 1)$ のとき　$z=2+z$

これを満たす z の値は存在しない.

$(x,\ y)=(1,\ 2)$ のとき　$2z=3+z$

ゆえに　$z=3$ (適する)

$(x,\ y)=(1,\ 3)$ のとき　$3z=4+z$

ゆえに　$z=2$ ($y>z$ となり不適)

以上から　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$

$\boxed{7}$ 条件 (A)，(B) から，長さ c の辺が直角三角形の斜辺となる。

よって，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。

ゆえに　$a^2=(c+b)(c-b)$　…… ①

$b>0$ であるから　$c+b>c-b$　…… ②

以下，①，② を満たす整数 $b,\ c$ の組が 3 つ以上存在するような正の奇数 a を調べる。

[1]　$a=1$ のとき

①，② を満たす整数 $b,\ c$ の組は存在しない。

[2]　$a=3$ のとき

$a^2=3^2$ より $(c+b,\ c-b)=(3^2,\ 1)$ の 1 組のみ。

$b,\ c$ の組も 1 組のみ。

[3]　$a=5,\ 7$ のとき

[2] と同様に b，c の組は 1 組のみ。

[4]　$a=9$ のとき

$a^2=3^4$ より $(c+b,\ c-b)=(3^4,\ 1)$，$(3^3,\ 3)$ の 2 組のみ。

b，c の組も 2 組のみ。

[5]　$a=11$，13 のとき

[2] と同様に b，c の組は 1 組のみ。

[6]　$a=15$ のとき

$a^2=3^2\cdot 5^2$ より

$$(c+b,\ c-b)=(3^2\cdot 5^2,\ 1),\ (3\cdot 5^2,\ 3),\ (3^2\cdot 5,\ 5),\ (5^2,\ 3^2)$$ の 4 組。

このとき　$(b,\ c)=(112,\ 113)$，$(36,\ 39)$，$(20,\ 25)$，$(8,\ 17)$

ここで $(b,\ c)=(8,\ 17)$ は $a<b$ を満たさない。他は $a<b$ を満たす。

ゆえに，b，c の組は 3 組である。

したがって，求める最小の a は　$a=15$

$\boxed{8}$ (1)　$-2\leqq\dfrac{1}{3}x+1<-1$ から　$-9\leqq x<-6$

(2)　$\left[\dfrac{1}{6}x\right]=k$ から　$k\leqq\dfrac{1}{6}x<k+1$　よって　$6k\leqq x<6k+6$ …… ①

$\left[\dfrac{1}{2}x+1\right]=k$ から　$k\leqq\dfrac{1}{2}x+1<k+1$　よって　$2k-2\leqq x<2k$ …… ②

①，② が共通範囲をもつための条件は

$$6k<2k \quad かつ \quad 6k+6>2k-2$$

ゆえに　$-2<k<0$

よって，①，② が共通範囲をもつときの整数 k の値は　$k=-1$

このとき，①，② から　$-6\leqq x<0$，$-4\leqq x<-2$

ゆえに　$\left[\dfrac{1}{6}x\right]=\left[\dfrac{1}{2}x+1\right]$ を満たす x の値の範囲は $-4\leqq x<-2$