**試験時間45分　　　【解答解説】**

1 辺 AB，辺 BC，辺 CA の長さがそれぞれ 12，11，10 の三角形 ABC を考える。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

2 円に内接する四角形 ABCD において，AB＝5，BC＝3，DA＝2，∠ABC＝60° であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 辺 CD の長さを求めよ。

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

(3) △BCD の面積を求めよ。

(4) 対角線 BD の長さを求めよ。

3 △ABC において，AB＝5，BC＝4，CA＝3 とし，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とする。また，頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とする。このとき，BP，PC，CQ の長さを求めよ。

4 1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC があり，AB の中点を M とする。さらに，辺 OB 上に点 P を，MP＋PC が最小になるようにとる。

(1) MP＋PC＝ア$\boxed{\phantom{00}}$ であり，MP＝イ$\boxed{\phantom{00}}$ である。また，BP＝ウ$\boxed{\phantom{00}}$ である。

(2) 立体において △PMC を考えるとき，cos∠MPC＝エ$\boxed{\phantom{00}}$，△PMC の面積はオ$\boxed{\phantom{00}}$ である。

(3) 四面体 PMBC と四面体 OABC の体積比は，

(四面体 PMBC の体積)：(四面体 OABC の体積) ＝カ$\boxed{\phantom{00}}$：キ$\boxed{\phantom{00}}$ である。

5 ＊　$a, b$ を実数とする．整式 $x^3-ax^2-x-b$ が $(x-a)^2$ で割り切れるとき，$a^2+b^2$ の値を求めよ．

6 ＊　複素数 $z$ の方程式 $z^2+z+k=0$ が絶対値 1 の解をもつような実数 $k$ の値を求めよ．

7 ＊　実数 $x$ と実数 $y$ に対して，$(x-y)^2<2$ を満たすとき，$x$ と $y$ は近いということにする。$x$，$y$，$z$ を任意の実数とするとき，次の命題は真か偽か．真の場合は簡潔に証明し，偽の場合には反例を挙げよ。

(1) $x$ と $y$ が近く，$y$ と $z$ が近ければ，$x$ と $z$ は近い。

(2) $x$ と $y$ が近ければ，$x+z$ と $y+z$ は近い。

(3) $x$ と $y$ が近ければ，$x^2$ と $y^2$ は近い。

$\boxed{1}$ 解答　$3\sqrt{10}$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　3　　(2)　$\dfrac{21\sqrt{3}}{4}$　　(3)　$\dfrac{189\sqrt{3}}{76}$　　(4)　$\dfrac{21\sqrt{19}}{19}$

$\boxed{3}$ 解答　$\mathrm{BP}=\dfrac{5}{2}$，$\mathrm{PC}=\dfrac{3}{2}$，$\mathrm{CQ}=6$

$\boxed{4}$ 解答　(ア)　$\sqrt{7}$　　(イ)　$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　　(ウ)　$\dfrac{2}{3}$　　(エ)　$\dfrac{2}{7}$　　(オ)　$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

(カ)：(キ)　1：6

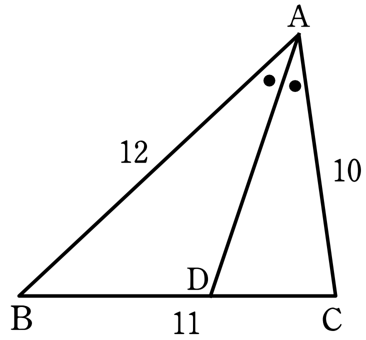
$\boxed{5}$ 解答　2

$\boxed{6}$ 解答　$k=-2,\ 0,\ 1$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　偽　　(反例)　$x=0$，$y=1$，$z=2$

(2)　真

(3)　偽　　(反例)　$x=9$，$y=10$




$\boxed{1}$ AD は ∠A の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 12 : 10 = 6 : 5$$

よって，BC＝11 より

$$BD = 11 \times \frac{6}{6+5} = 6$$

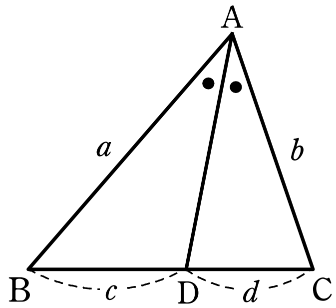
△ABC に余弦定理を用いると

$$\cos B = \frac{12^2+11^2-10^2}{2\cdot 12\cdot 11} = \frac{165}{2\cdot 12\cdot 11} = \frac{5}{8}$$

よって　$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB\cdot BD\cos B$

$$= 12^2 + 6^2 - 2\cdot 12\cdot 6\cdot \frac{5}{8} = 90$$

AD＞0 であるから　$AD = 3\sqrt{10}$



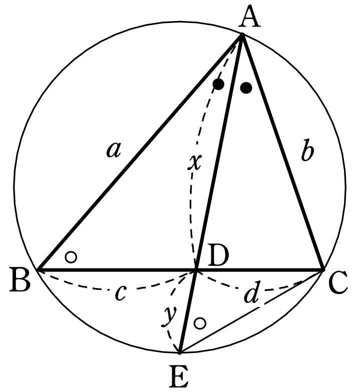

参考　△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とし，

$AB=a$，$AC=b$，$BD=c$，$DC=d$ とする。

このとき，線分 AD の長さは

$$AD = \sqrt{ab-cd}$$

である。




証明　AD の延長と △ABC の外接円の交点を E とし，

$AD=x$，$DE=y$ とする。

△ABD∽△AEC であるから　$a : x = (x+y) : b$

よって　$x^2 = ab - xy$　……①

また，方べきの定理により

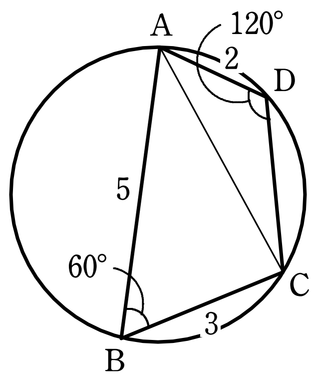
$xy = cd$　……②

② を ① に代入すると　$x^2 = ab - cd$

$x>0$ であるから　$x = \sqrt{ab-cd}$　(証明終)

142 番の場合は，次のようになる。

$$AD = \sqrt{12\cdot 10 - 6\cdot 5} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$




$\boxed{2}$ (1)　△ABC において，余弦定理により

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos 60°$

$= 5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$

$= 19$

また，四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle ADC = 180° - \angle ABC = 120°$

よって，△ACD において，余弦定理により

$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2CD\cdot DA\cos 120°$

すなわち　$19 = CD^2 + 2^2 - 2CD\cdot 2\cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$　ゆえに　$(CD+5)(CD-3)=0$

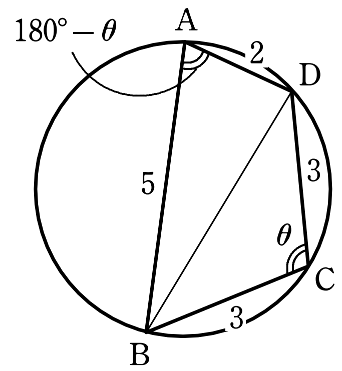
CD＞0 であるから　CD＝3

(2)　四角形 ABCD の面積は

$$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin 60^\circ+\frac{1}{2}CD\cdot DA\sin 120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$$

(3)　$\angle BCD=\theta$ とおくと　　$\angle BAD=180^\circ-\theta$




$\triangle BCD$ において，余弦定理により

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\theta$$
$$=3^2+3^2-2\cdot 3\cdot 3\cos\theta$$
$$=18-18\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

$\triangle ABD$ において，余弦定理により

$$BD^2=AB^2+DA^2-2AB\cdot DA\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=5^2+2^2-2\cdot 5\cdot 2\cdot(-\cos\theta)$$
$$=29+20\cos\theta \quad \cdots\cdots ②$$

①，② から　　$18-18\cos\theta=29+20\cos\theta$　　　　ゆえに　　$\cos\theta=-\frac{11}{38}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\sin\theta>0$ であるから　　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{11}{38}\right)^2}=\frac{21\sqrt{3}}{38}$

したがって　　$\triangle BCD=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{21\sqrt{3}}{38}=\frac{189\sqrt{3}}{76}$

別解　$\angle BCD=\theta$ とおくと，四角形 ABCD の面積は

$$\triangle BCD+\triangle BAD=\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin\theta+\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin(180^\circ-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sin\theta=\frac{19}{2}\sin\theta$$

これと (2) より，四角形 ABCD の面積について　　$\frac{19}{2}\sin\theta=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

ゆえに　　$\sin\theta=\frac{21\sqrt{3}}{38}$

したがって　　$\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{21\sqrt{3}}{38}=\frac{189\sqrt{3}}{76}$

(4)　① より　　$BD^2=18(1-\cos\theta)=18\left\{1-\left(-\frac{11}{38}\right)\right\}=\frac{9\cdot 49}{19}$

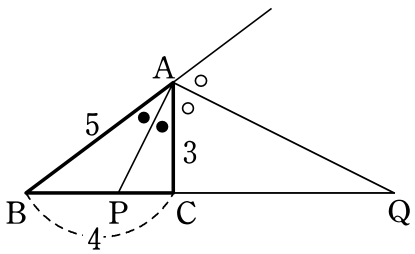
$BD>0$ であるから　　$BD=\sqrt{\frac{9\cdot 49}{19}}=\frac{21\sqrt{19}}{19}$

参考　円に内接する四角形 ABCD において，トレミーの定理により

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD$$

よって　　$\sqrt{19}\,BD=5\cdot 3+3\cdot 2$　　　　ゆえに　　$BD=\frac{21\sqrt{19}}{19}$

$\boxed{3}$ APは ∠A の二等分線であるから




$$AB : AC = BP : PC$$

すなわち　$5 : 3 = BP : (4 - BP)$

よって　$5(4 - BP) = 3BP$　　ゆえに　$BP = \frac{5}{2}$

また　$PC = 4 - BP = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

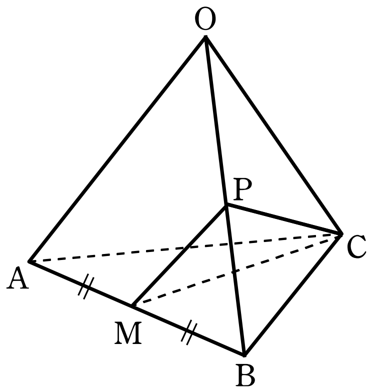
AQ は頂点 A における外角の二等分線であるから

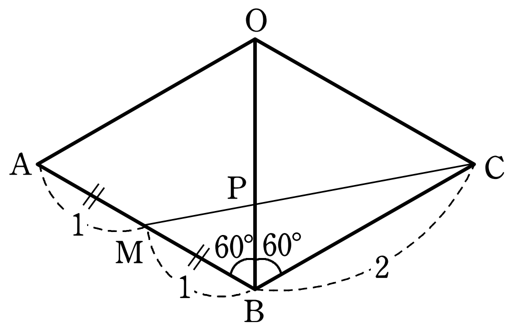
$AB : AC = BQ : CQ$　　すなわち　$5 : 3 = (4 + CQ) : CQ$

よって　$5CQ = 3(4 + CQ)$　　ゆえに　$CQ = 6$

$\boxed{4}$ (1)　正四面体の展開図上で考える。

2面 OAB と OBC について，下の右図のように，四角形 OABC となる。




MP＋PC が最小になるのは，3点 M，P，C が一直線上にあるときである。

このとき，MP＋PC＝MC であり，△MBC において，余弦定理により

$$MC^2 = MB^2 + BC^2 - 2MB \cdot BC\cos 120°$$
$$= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

$MC > 0$ であるから　$MC = \sqrt{7}$　　すなわち　$MP + PC = {}^{ア}\sqrt{7}$

BP は ∠MBC を2等分するから　$MP : PC = BM : BC = 1 : 2$

よって　$MP = \frac{1}{3}MC = {}^{イ}\frac{\sqrt{7}}{3}$

△BMP＋△BCP＝△BCM であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot BP\sin 60° + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BP\sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sin 120°$$

ゆえに　$\frac{3\sqrt{3}}{4}BP = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　よって　$BP = {}^{ウ}\frac{2}{3}$

(2)　△PMC において　$PC = 2PM = \frac{2\sqrt{7}}{3}$，$MC = 2\sin 60° = \sqrt{3}$

余弦定理により

$$\cos\angle MPC = \frac{PM^2 + PC^2 - MC^2}{2PM \cdot PC}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}}=\frac{\frac{8}{9}}{\frac{28}{9}}={}^{エ}\frac{2}{7}$$

よって　$\sin\angle\mathrm{MPC}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{7}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{PMC}=\frac{1}{2}\mathrm{PM}\cdot\mathrm{PC}\sin\angle\mathrm{MPC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}={}^{オ}\frac{\sqrt{5}}{3}$

(3)　四面体 PMBC と四面体 OABC の底面を，それぞれ △BCM，△ABC とすると，高さの比は　$\mathrm{BP}:\mathrm{BO}=\frac{2}{3}:2=1:3$

また　$\triangle\mathrm{BCM}:\triangle\mathrm{ABC}=1:2$

よって　(四面体 PMBC の体積)：(四面体 OABC の体積)$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right):1={}^{カ}1:{}^{キ}6$

$\boxed{5}$ 題意から　$x^3-ax^2-x-b=(x-a)^2(x+c)$ …… ① と表すことができる．① の右辺を展開すると

$$(x^2-2ax+a^2)(x+c)=x^3-2ax^2+a^2x+cx^2-2acx+a^2c$$
$$=x^3-(2a-c)x^2+a(a-2c)x+a^2c$$ …… ② となる．

② が ① の左辺と恒等的に等しいのであるから

$\begin{cases}2a-c=a & \cdots\cdots ③\\ a(a-2c)=-1 & \cdots\cdots ④\\ a^2c=-b & \cdots\cdots ⑤\end{cases}$ が成り立つ．③ から $c=a$

これを ④ に代入して $ac=1$

⑤ から $1\cdot a=-b$　ゆえに　$b^2=(-a)^2=1$　　よって　$a^2+b^2=2$

別解1　整式 $f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れる $\Longleftrightarrow$ $f(a)=f'(a)=0$ から

$\begin{cases}f(a)=a^3-a^3-a-b=0\\ f'(a)=3a^2-2a^2-1=0\end{cases}$

よって　$a+b=0,\ a^2=1$

$(a,b)=(1,-1),(-1,1)$　ゆえに　$a^2+b^2=2$

別解2　$x^3-ax^2-x-b$ を $(x-a)^2$ で割り算すると，余りが 0 であるから

$a^2-1=0,\ a^3+b=0$　よって　$a=\pm1,\ b=\mp1$

これから $a^2+b^2=2$

$\boxed{6}$ [1]　$z$ が実数のとき，$|z|=1$ から　$z=\pm1$

$z=1$，$z=-1$ を方程式に代入すると，それぞれ　$1+1+k=0$，$1-1+k=0$

ゆえに　$k=-2$，$0$

[2]　$z$ が虚数のとき，方程式の解は $\alpha$，$\overline{\alpha}$ とおける．

解と係数の関係から　$\alpha\overline{\alpha}=k$　すなわち　$|\alpha|^2=k$

$|\alpha|=1$ から　$k=1$

このとき，判別式について，$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$ となり適する．

以上により，求める $k$ の値は　$k=-2,\ 0,\ 1$

$\boxed{7}$ (1)　不成立．(反例)　$x=0,\ y=1,\ z=2$

このとき　$(x-y)^2=(0-1)^2=1<2,\ (y-z)^2=(1-2)^2=1<2$ であるが

$(x-z)^2=(0-2)^2=4>2$

(2)　成立．

(証明)　$(x-y)^2<2$ のとき $\{(x+z)-(y+z)\}^2=(x-y)^2<2$ が成り立つ．

ゆえに，$x+z$ と $y+z$ は近い．

(3)　不成立．(反例)　$x=9,\ y=10$

このとき　$(x-y)^2=(9-10)^2=1<2$ であるが　$(x^2-y^2)^2=(9^2-10^2)^2=361>2$