

試験時間50分 解答解説

- 1 $\frac{1}{(\cos 20^\circ) \cdot (\cos 40^\circ) \cdot (\cos 80^\circ)}$ の値を求めよ。
- 2 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ を満たす x の値を求めよ。
- 3 $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 方程式 $\sqrt{3}|\sin x| - \cos x = \sqrt{2}$ を解け。
- 4 関数 $3\sin^2 x + 4\sin x \cos x - \cos^2 x$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値 M と最小値 m を求めよ。
- 5 (1) 2つの実数 α, β が $\sin \alpha = \sin \beta$ を満たすとき, α, β の値についてどのような関係式が成り立つかを答えよ。
 (2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin 4\theta = \cos \theta$ を満たす θ の値を求めよ。
- 6 a, c を実数とし, 関数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2}$, $g(x) = x^2 - 2ax + 1$ を考える。
 (1) 方程式 $f(x) = c$ が $0 \leq x \leq \pi$ で異なる2つの解をもつような c の値の範囲を求めよ。
 (2) また, 方程式 $g(f(x)) = 0$ が $0 \leq x \leq \pi$ で異なる3つの解をもつような a の値の範囲を求めよ。
- 7 (1) $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ で表せ。
 (2) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos \alpha)(x - 2\cos \beta)$ となる角度 α, β を求めよ。ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。

1 解答 8

2 解答 $\frac{2}{5}$

3 解答 $x = \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$

4 解答 $x = \frac{3}{8}\pi$ のとき $M = 2\sqrt{2} + 1$, $x = 0$ のとき $m = -1$

5 解答 (1) $\alpha + \beta = (2n + 1)\pi$ または $\alpha - \beta = 2n\pi$ (n は整数)
 (2) $\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$

6 解答 (ア) $2 \leq c < 3$ (イ) $\frac{5}{4} \leq a < \frac{5}{3}$

7 解答 (1) 略 (2) 略 (3) $\alpha = 40^\circ, \beta = 160^\circ$

$$\begin{aligned}
 [1] \quad \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)\cos 80^\circ = \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 80^\circ \\
 &= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{4}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) \\
 &= \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{4}\cos(180^\circ - 80^\circ) + \frac{1}{8} \\
 &= \frac{1}{4}\cos 80^\circ - \frac{1}{4}\cos 80^\circ + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{(\cos 20^\circ) \cdot (\cos 40^\circ) \cdot (\cos 80^\circ)} = 8$

$$\begin{aligned}
 [2] \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x &= (\sin 4x + \sin x) + (\sin 3x + \sin 2x) \\
 &= 2\sin \frac{5}{2}x \cos \frac{3}{2}x + 2\sin \frac{5}{2}x \cos \frac{x}{2} \\
 &= 2\sin \frac{5}{2}x \left(\cos \frac{3}{2}x + \cos \frac{x}{2} \right) \\
 &= 2\sin \frac{5}{2}x \cdot 2\cos x \cos \frac{x}{2}
 \end{aligned}$$

よって、方程式は $\sin \frac{5}{2}x \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} = 0 \quad \dots\dots ①$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$ であるから $\cos x \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0$

よって、① から $\sin \frac{5}{2}x = 0$

$0 < \frac{5}{2}x < \frac{5}{4}\pi$ であるから、 $\sin \frac{5}{2}x = 0$ となるのは $\frac{5}{2}x = \pi$

ゆえに $x = \frac{2}{5}\pi$

[3] [1] $0 \leq x \leq \pi$ のとき $\sin x \geq 0$

よって、方程式は $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

変形すると $2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$ すなわち $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$ であるから $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$

よって $x = \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi$

[2] $\pi < x < 2\pi$ のとき $\sin x < 0$

よって、方程式は $-\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

変形すると $-2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$ すなわち $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{7}{6}\pi < x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$ であるから $x + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$$\text{よって } x = \frac{13}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$$

$$\text{以上から } x = \frac{5}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi$$

$$\begin{aligned} \boxed{4} \quad 3\sin^2 x + 4\sin x \cos x - \cos^2 x &= \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) + 2\sin 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ &= 2\sin 2x - 2\cos 2x + 1 = 2\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } -\frac{\pi}{4} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi \text{ であるから,}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ すなわち } x = \frac{3}{8}\pi \text{ のとき } M = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2} + 1 = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \text{ すなわち } x = 0 \text{ のとき}$$

$$m = 2\sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1 = -1$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \sin \alpha = \sin \beta \text{ から, } n \text{ を整数として}$$

$$\alpha = \beta + 2n\pi \quad \text{または} \quad \alpha = (\pi - \beta) + 2n\pi$$

$$\text{よって } \alpha - \beta = 2n\pi \quad \text{または} \quad \alpha + \beta = (2n + 1)\pi$$

$$\boxed{\text{別解}} \quad \sin \alpha = \sin \beta \text{ から } \sin \alpha - \sin \beta = 0$$

$$\text{よって } 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

$$\text{したがって, } n \text{ を整数として}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{または} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = n\pi$$

$$\text{ゆえに } \alpha + \beta = (2n + 1)\pi \quad \text{または} \quad \alpha - \beta = 2n\pi$$

$$(2) \quad \sin 4\theta = \cos \theta \text{ から } \sin 4\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$(1) \text{ の結果を用いると, } n \text{ を整数として}$$

$$4\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (2n + 1)\pi \quad \text{または} \quad 4\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2n\pi$$

$$\text{よって } 3\theta = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{または} \quad 5\theta = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\text{ゆえに } \theta = \frac{4n + 1}{6}\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{4n + 1}{10}\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad \theta = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}$$

$$\text{すなわち } \theta = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$$

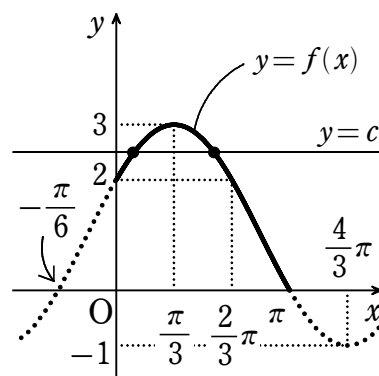
[6] $f(x) = \sqrt{3} \sin x + 2 \cdot \frac{1 + \cos x}{2} = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 1 = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

よって、 $0 \leq x \leq \pi$ における $y = f(x)$ のグラフは、右の図の実線部分のようになる。

方程式 $f(x) = c$ が $0 \leq x \leq \pi$ で異なる 2 つの解をもつための条件は、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = c$ が $0 \leq x \leq \pi$ で異なる 2 つの共有点をもつことである。

よって、求める c の値の範囲は $2 \leq c < 3$

また、方程式 $f(x) = c$ の $0 \leq x \leq \pi$ における異なる解の個数は



$2 \leq c < 3$ のとき 2 個、 $0 \leq c < 2$, $c = 3$ のとき 1 個、 $c < 0$, $3 < c$ のとき 0 個したがって、方程式 $g(f(x)) = 0$ が $0 \leq x \leq \pi$ で異なる 3 つの解をもつための条件は、 t についての 2 次方程式 $g(t) = 0$ が

$2 \leq t < 3$ の範囲に 1 個、 $0 \leq t < 2$, $t = 3$ の範囲に 1 個

の計 2 個の異なる実数解をもつことである。

[1] $g(t) = 0$ が $t = 3$ を解にもつとき

$g(3) = 0$ から $10 - 6a = 0$ これを解くと $a = \frac{5}{3}$

このとき $g(t) = t^2 - \frac{10}{3}t + 1 = (t - 3)\left(t - \frac{1}{3}\right)$

よって、 $g(t) = 0$ の実数解は $t = 3, \frac{1}{3}$

ゆえに、 $a = \frac{5}{3}$ のとき、 $g(t) = 0$ は $2 \leq t < 3$ の範囲に実数解をもたないから、不適である。

[2] $g(t) = 0$ が $t = 2$ を解にもつとき

$g(2) = 0$ から $5 - 4a = 0$ これを解くと $a = \frac{5}{4}$

このとき $g(t) = t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = (t - 2)\left(t - \frac{1}{2}\right)$

よって、 $g(t) = 0$ の実数解は $t = 2, \frac{1}{2}$

ゆえに、 $a = \frac{5}{4}$ のとき、 $g(t) = 0$ は

$2 \leq t < 3$ の範囲に 1 個、 $0 \leq t < 2$ の範囲に 1 個

の計 2 個の異なる実数解をもつから、適する。

[3] $g(t) = 0$ が $0 \leq t < 2$ の範囲と $2 < t < 3$ の範囲にそれぞれ 1 個ずつ解をもつとき満たすべき条件は

$g(0) \geq 0$ かつ $g(2) < 0$ かつ $g(3) > 0$

すなわち $1 \geq 0$ かつ $5 - 4a < 0$ かつ $10 - 6a > 0$

よって $\frac{5}{4} < a < \frac{5}{3}$

[1], [2], [3] より, 求める a の値の範囲は $\frac{5}{4} \leq a < \frac{5}{3}$

[7] (1) $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta$
 $= (2\cos^2 \theta - 1)\cos \theta - 2\sin \theta \cos \theta \cdot \sin \theta$
 $= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta)\cos \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

(注) $(2\cos 80^\circ)^3 - 3 \cdot 2\cos 80^\circ + 1$
 $= 8\cos^3 80^\circ - 6\cos 80^\circ + 1 = 2(4\cos^3 80^\circ - 3\cos 80^\circ) + 1$
 $= 2\cos(3 \times 80^\circ) + 1 = 2\cos 240^\circ + 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

よって, $2\cos 80^\circ$ は $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解である。

(2) $(2\cos \theta)^3 - 3 \cdot 2\cos \theta + 1 = 0$
 $\iff 2(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + 1 = 0$
 $\iff 2\cos 3\theta + 1 = 0 \iff \cos 3\theta = -\frac{1}{2} \dots\dots \textcircled{1}$

ここで, ① を満たす θ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) を求めると, $0^\circ < 3\theta < 540^\circ$ であるから

$3\theta = 120^\circ, 240^\circ, 480^\circ$ よって $\theta = 40^\circ, 80^\circ, 160^\circ$

ゆえに, $2\cos 40^\circ, 2\cos 160^\circ$ は $x^3 - 3x + 1 = 0$ の $2\cos 80^\circ$ 以外の 2 つの解である。

$\alpha < \beta$ であるから $\alpha = 40^\circ, \beta = 160^\circ$