YAWARAKA 先生のテキスト 解答 ⑫１１　平面ベクトル

平面ベクトル篇

標準問題

⑫**11-標-1**

三角形 ABC の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{b}$ とおく。

(1)　辺 BC を 1 : 2 の比に外分する点を D とし，辺 CA を 2 : 3 の比に外分する点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　2 点 D，E を(1)におけるものとし，線分 DE の中点を M とすれば，3 点 A，G，M は同一直線上にあることを証明せよ。

【解答】（１）$\overrightarrow{\mathrm{GD}}=\vec{a}+3\vec{b}$　，$\overrightarrow{\mathrm{GE}}=-5\vec{a}-3\vec{b}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-6\vec{a}-6\vec{b}$

（２）$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=-2\overrightarrow{\mathrm{GA}}$ より，示せる

⑫**11-標-2**

△OAB において辺 OA を 5 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 4 に内分する点を D，線分 CD の中点を M とする。線分 OM の延長が辺 AB と交わる点を N とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

【解答】$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　←メネチェバは使えません

⑫**11-標-3**

三角形 OAB において，辺 OA の中点を C とし，線分 BC を 4 : 3 に内分する点を D とする。線分 OD の延長が辺 AB と交わる点を E，線分 AD の延長が辺 OB と交わる点を F とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(2)　三角形 OAB と三角形 CEF の面積比を求めよ。

【解答】（１）$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　（２）△OAB : △CEF＝25 : 6

⑫**11-標-4**

(1)　平面上に△ABC と点 O があり，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。

△ABC の内心 I の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2)　$\sin A\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\sin B\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\sin C\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

【解答】（１）$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$　（２）（１）で O=I として正弦定理

⑫**11-標-5**

平面上に四角形 ABCD と，この四角形の外部に点 E がある。これらの点から得られるベクトルについて，関係式

$$2\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\ ,\quad 8\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=3\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\right)$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCDE はどのような四角形か。

(2)　四角形 ABCD と四角形 BCDE の面積比を求めよ。

【解答】

（１）始点を B に統一＆ $\overrightarrow{BA}$ を消去すると， $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}$ が得られることより，平行四辺形

（２）　9 : 14

⑫**11-標-6**

平面上に△OAB があり，その面積を S とする。平面上の点 P に対して，

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

と表す。s, t が負でなく，$s+t\leqq 1,\ 3s+4t\geqq 2$ を満たしている。点 P の存在する範囲の面積を S で表せ。

【解答】（２）$\dfrac{2}{3}S$

⑫**11-標-7**

$\vec{a}$, $\vec{b}$ を長さ１のベクトルとする。$\vec{u}=4\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{v}=2\vec{a}+\vec{b}$ が直交するとき，

(1)　$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ の値を求めよ。

(2)　$\vec{p}$ を長さ１のベクトルとするとき，内積$\left(\vec{p}+\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}+\vec{b}\right)$の最大値を求めよ。

【解答】（１）$\dfrac{1}{2}$　　（２）$\sqrt{3}$　　（３）$\dfrac{3}{2}-\sqrt{3}\leqq$ 与式 $\leqq\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$

⑫**11-標-8**

△ABC の外心を O，外接円の半径を１とする。

$$4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

であるとき，辺 AB の長さを求めよ

【解答】$\left|\overrightarrow{OC}\right|=1$ より C を消去して内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求め，$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ を２乗・・・・・$\dfrac{3}{2}$ を得る

⑫**11-標-9**

AB＝6，BC＝$5\sqrt{2}$，CA＝$\sqrt{26}$ である△ABC の外心を O とする。$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

【解答】$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{13}{30}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

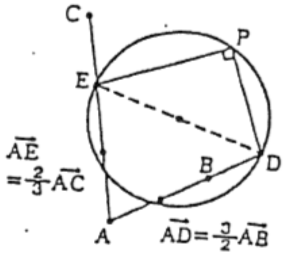
⑫**11-標-10**

A，B，C は平面上の相異なる 3 点であって同一直線上にはないとする。このとき，その平面上の点 P で

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2-3\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}-6\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$$

という関係を満たすものの集合はどのような図形になるかを説明し，かつそれを図示せよ。

【解答】



⑫**11-標-11**

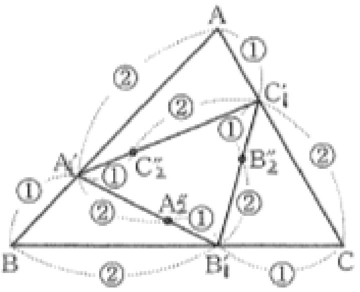
△ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=a$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=b$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=c$ とおく。このとき，△ABC の面積を a, b, c で表せ。

【解答】$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{ab+bc+ca}$

発展問題

⑫11-発-1

△ABC の辺 AB，BC，CA をそれぞれ 2 : 1 に内分する点をそれぞれ，A_1，B_1，C_1 とし，△$A_1B_1C_1$ の辺 A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1 を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とする。このとき，直線 AA_2，BB_2，CC_2 は△ABC の重心で交わることを証明せよ。



A, A_1, A_2, … の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{a'}$，$\vec{a''}$，… などと表すことにする．

条件より，

$$\vec{a''}=\frac{1}{3}\vec{a'}+\frac{2}{3}\vec{b'}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{9}(\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}). \qquad \cdots①$$

また，△ABC の重心を G とすると，

$$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

より，

$$\vec{b}+\vec{c}=3\vec{g}-\vec{a}.$$

これを①に代入して，

$$\vec{a''}=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}(3\vec{g}-\vec{a})$$

$$=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{g}.$$

したがって，

$$\vec{g}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{a''}.$$

同様に，

$$\vec{g}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{b''}$$

$$=\frac{1}{4}\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{c''}.$$

よって，G は線分 AA_2, BB_2, CC_2 を それぞれ 3:1 に内分する

ゆえに，AA_2，BB_2，CC_2 は △ABC の重心 G で交わる

⑫ **11-発-2**

鋭角三角形 ABC の外心を O，垂心を H とするとき，次の(1)，(2)が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\sin 2A\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sin 2B\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sin 2C\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

(2)　$\tan A\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}+\tan B\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}+\tan C\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\vec{0}$

解答 1　重心に注目して

(1)　$\sin 2A\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\sin 2B\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\sin 2C\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$

をみたすように点 A'，B'，C' をとると，目的の式は O が △A'B'C の重心であることを示しているので

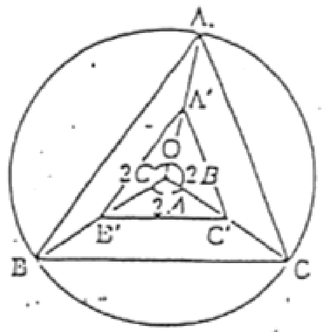
$$\triangle \mathrm{OA'B'}=\triangle \mathrm{OB'C'}=\triangle \mathrm{OC'A'}$$

を証明すればよい．ところが

$$2\triangle \mathrm{OA'B'}=\mathrm{OA'}\cdot\mathrm{OB'}\cdot\sin 2C$$
$$=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin 2A\sin 2B\sin 2C.$$

△OB'C'，△OC'A' も同様の式で表される．

したがって △OA'B'＝△OB'C'＝△OC'A'．（証明終り）



(2)　$\tan A\cdot\overrightarrow{\mathrm{HA}}=\overrightarrow{\mathrm{HA'}}$，$\tan B\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{HB'}}$，$\tan C\cdot\overrightarrow{\mathrm{HC}}=\overrightarrow{\mathrm{HC'}}$ をみたすように点 A'，B'，C' をとると，(1)と同様に

$$\triangle \mathrm{HA'B'}=\triangle \mathrm{HB'C'}=\triangle \mathrm{HC'A'}$$

を示せばよい．右図で $\angle \mathrm{A'HB'}=\angle \mathrm{DHE}=\pi-C$ なので

$$2\triangle \mathrm{HA'B'}=\mathrm{HA'}\cdot\mathrm{HB'}\cdot\sin(\pi-C)$$
$$=\mathrm{HA}\cdot\mathrm{HB}\cdot\tan A\tan B\sin C.$$

ここで $\mathrm{HA}\sin C=\mathrm{AE}=C\cos A=2r\sin C\cos A$．

（r は外接円の半径）

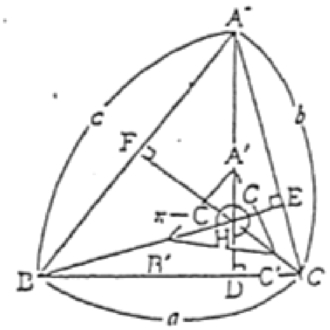
$$\therefore\ \mathrm{HA}=2r\cos A.$$

同様に $\mathrm{HB}=2r\cos B$ なので

$$2\triangle \mathrm{HA'B'}=4r^2\cos A\cos B\tan A\tan B\sin C$$
$$=4r^2\sin A\sin B\sin C.$$

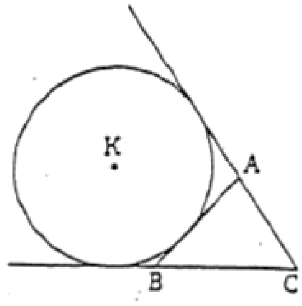
△HB'C'，△HC'A' も同様の式で表されるので

△HA'B'＝△HB'C'＝△HC'A'．（証明終り）



⑫$\boxed{\textbf{11-発-3}}$

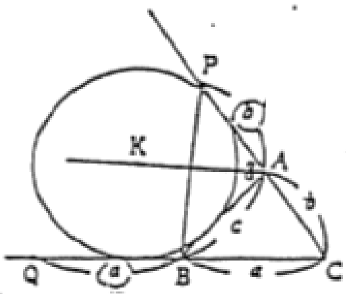
三角形 ABC を考える。辺 CA の A の方向への延長上および辺 CB の B の方向への延長上にそれぞれ接点をもち，さらに AB に接する円の中心を K とする。また，AB＝c, BC＝a, CA＝b とする。



(1)　ベクトル $\overrightarrow{AK}$ を，ベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ および，a, b, c で表せ。

(2)　さらに平面上に点 O をとり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OK}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および，a, b, c で表せ。

(1)　右図のように，P，Q をとると，K は，∠BAP の 2 等分線上にあるから，(1) により



$$\overrightarrow{AK}=s\cdot\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AP}}{c+b}$$

$$=s'(b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC})\cdots①$$

$(s'=s/(c+b))$ と表せる．

K は，∠ABQ の 2 等分線上にもあるから，同様に，

$$\overrightarrow{BK}=t(a\overrightarrow{BA}+c\overrightarrow{BQ})=t(-a\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{CB})$$

$$=t\{-a\overrightarrow{AB}+c(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\}$$

$$=t\{(c-a)\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}\}$$

と表せる．よって，

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\{t(c-a)+1\}\overrightarrow{AB}-tc\overrightarrow{AC}\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立であるから，①＝② により，

$$s'b=t(c-a)+1,\ -s'c=-tc$$

$$\therefore\ s'=t=\frac{1}{a+b-c}$$

よって，① から，$\overrightarrow{AK}=\dfrac{b}{a+b-c}\overrightarrow{AB}-\dfrac{c}{a+b-c}\overrightarrow{AC}$

(2)　$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}$

$$=\vec{a}+\frac{b}{a+b-c}(\vec{b}-\vec{a})-\frac{c}{a+b-c}(\vec{c}-\vec{a})$$

$$=\frac{a}{a+b-c}\vec{a}+\frac{b}{a+b-c}\vec{b}-\frac{c}{a+b-c}\vec{c}$$

⑫$\boxed{\textbf{11-発-4}}$

△ABC の外心 O から直線 BC，CA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P，Q，R とするとき，

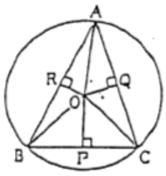
$$\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$$

が成立しているとする。このとき，

(1)　∠A の大きさを求めよ。

(2)　△ABC の外接円の半径を 1 とするとき，△ABC の面積を求めよ。

(1) 垂線の足 P，Q，R はそれぞれ辺 BC，CA，AB の中点であるから



$\overrightarrow{OP}=\dfrac{(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})}{2}$

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})}{2}$

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ を等式に代入すると

$$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})+3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\vec{0}$$

$\therefore\quad 5\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$　…①(答)

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=r$ とおく．

①から　$4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=-5\overrightarrow{OA}$　……②

$\therefore\quad |4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}|^2=5^2|\overrightarrow{OA}|^2$

$$16|\overrightarrow{OB}|^2+24\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+9|\overrightarrow{OC}|^2=25|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$25r^2+24\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=25r^2$$

$\therefore\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

よって　$\angle BOC=90^\circ$

②から　$\dfrac{4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{7}=-\dfrac{5}{7}\overrightarrow{OA}$

辺 BC を 3：4 に内分する点を D とすると，$\overrightarrow{OD}=-\dfrac{5}{7}\overrightarrow{OA}$　したがって，O は△ABC の内部の点である．

したがって

$\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC=45^\circ$　……(答

(2)△OBC$=\dfrac{1}{2}$　より，△ABC$=\dfrac{6}{5}$

⑫$\boxed{\textbf{11-発-5}}$

△ABC に対し，

$$\vec{p}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

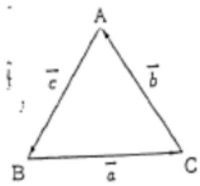
とする。

(1)　△ABC が正三角形ならば，$\vec{p}=\vec{0}$ であることを示せ。

(2)　$\vec{p}=\vec{0}$ ならば，△ABC は正三角形であることを示せ。

解答　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{b}$ とおくと

$$\vec{p}=(\vec{c},\ \vec{a})\vec{b}+(\vec{a},\ \vec{b})\vec{c}+(\vec{b},\ \vec{c})\vec{a}$$



(1)　△ABC が正三角形ならば

$$(\vec{c},\ \vec{a})=(\vec{a},\ \vec{b})=(\vec{b},\ \vec{c})$$

であるから，この値を $k\ (=|\vec{a}|^2\cos 120^\circ)$

とおけば　$\vec{p}=k(\vec{b}+\vec{c}+\vec{a})=\vec{0}$

(2)　$\vec{a}=-\vec{b}-\vec{c}$ であるから

$$\vec{p}=(\vec{c},\ \vec{a}-\vec{b})\vec{b}+(\vec{b},\ \vec{a}-\vec{c})\vec{c}=\vec{0}$$

$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立ゆえ

$$(\vec{c},\ \vec{a}-\vec{b})=0\quad かつ\quad (\vec{b},\ \vec{a}-\vec{c})=0$$

$\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{b}=-\vec{a}-\vec{c}$ を代入すると

$$(\vec{c},\ \vec{a}-\vec{b})=-(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-\vec{b})=-(|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2)=0$$

$$(\vec{b},\ \vec{a}-\vec{c})=-(\vec{a}+\vec{c},\ \vec{a}-\vec{c})=-(|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2)=0$$

$\therefore\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$　　よって，△ABC は正三角形である．

⑫$\boxed{\textbf{11-}\text{発}\textbf{-6}}$

平面上に三角形 ABC がある。実数 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動くとき，

$$\overrightarrow{AP} + 2t\overrightarrow{BP} + (1-t)\overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルを表す。

解答 $\overrightarrow{AP}+2t\overrightarrow{BP}+(1-t)\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AP}+2t(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})+(1-t)(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$(2+t)\overrightarrow{AP}=2t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$

$0\leqq t\leqq 1$ より，$2+t\neq 0$ だから，

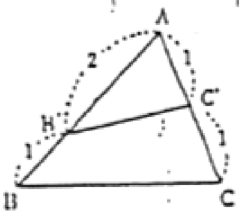
$$\overrightarrow{AP}=\frac{2t}{2+t}\overrightarrow{AB}+\frac{1-t}{2+t}\overrightarrow{AC}$$

ここで，任意の t について

$$\frac{2t}{2+t}\alpha+\frac{1-t}{2+t}\beta=1 \text{ となる } \alpha,\ \beta \text{ を考える。}$$

$(2\alpha-\beta-1)t+(\beta-2)=0$ より，任意の t に対して

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta-1=0 \\ \beta-2=0 \end{cases} \qquad \therefore\ \alpha=\frac{3}{2},\ \beta=2$$



よって，$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}$，$\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$ なる 2 点

B′，C′ を考えると，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3t}{2+t}\cdot\overrightarrow{AB'}+\frac{2(1-t)}{2+t}\overrightarrow{AC'}$$

このとき，$0\leqq t\leqq 1$ より

$$\frac{3t}{2+t}\geqq 0,\quad \frac{2(1-t)}{t+2}\geqq 0$$

かつ

$$\frac{3t}{2+t}+\frac{2(1-t)}{2+t}=1 \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つから点 P の軌跡は，AB を 2 : 1 に内分する点と，AC の中点を結ぶ線分。

⑫$\boxed{\textbf{11-発-7}}$

平面上に 3 つの定点 O，A，B が与えられ，OA＝3，OB＝2，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$ を満たしている。

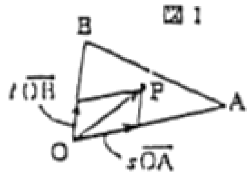
(1)　実数 s,t が $s\geqq0, t\geqq0, 0\leqq s+t\leqq1$ を満たしながら変わるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の終点 P が動く領域の面積を求めよ。

(2)　点 P が(1)の領域を動き，点 Q が点 A を中心とする半径 1 の円の周および内部を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の終点 R が動く領域の面積を求めよ。

解　(1)　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\dfrac{1}{3}$ より $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(2)　$s+t=1$ となる点 P の軌跡は直線 AB だから，題意をみたす点 P の動く領域は △OAB の周及び内部となる．

図 1



よって，(1)とから答えは

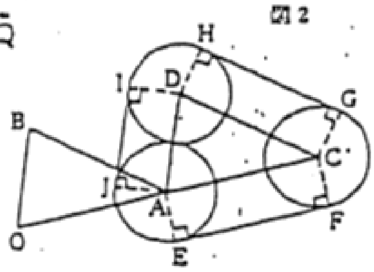
$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}$$

とおくと，T の動く領域は(2)の領域を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ だけ平行移動させた右図の △ACD の周及び内部となり，さらに，

図 2



$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\leqq1$ より，R の動く領域は図 2 の網目部分になる．その面積を S とすれば，

$$S=\triangle\mathrm{ACD}+\text{▭AEFC}+\text{▭CGHD}+\text{▭DIJA}$$
$$+\text{扇形 AJE}+\text{扇形 CFG}+\text{扇形 DHI}$$

ここで，AC＝3，AD＝2，

$$\mathrm{CD}^2=\mathrm{AB}^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=2^2+3^2-2\cdot2=9$$

より，　　CD＝3

また，3 つの扇形の中心角の和は 360° だから，(1)とから，$S=2\sqrt{2}+3\cdot1+3\cdot1+2\cdot1+\pi\cdot1^2=2\sqrt{2}+8+\pi$