試験時間45分　　解答は<u>解答用紙</u>に書いて、提出してください

$\boxed{1}$ 2011茨城大学

水戸黄門，助さん，格さん，弥七，お銀，八兵衛の 6 人が左から右へこの順番で 1 列に並んで座っている。6 人が席を入れ換える。どの並びかたも同様の確からしさで起こるものとする。このとき以下となる確率を求めよ。

(1)　助さんと格さんが両端に座る。

(2)　水戸黄門とお銀が隣どうしに座る。

(3)　最初と同じ席に座る人がちょうど 3 人。

(4)　最初と同じ席に座る人がいない。

$\boxed{2}$ 正 n 面体の各面に 1 から n の数字を 1 つずつ書き，n 面のさいころ (n 面ダイス) を作る。ただし回転させて一致するものは同じ n 面ダイスとみなす。

(1)　n は 5 つの値をとる。それらの和は $^{ア}\boxed{}$ である。

(2)　数字の書き方は $n=4$ のとき $^{イ}\boxed{}$ 通り，$n=6$ のとき $^{ウ}\boxed{}$ 通り，$n=8$ のとき $^{エ}\boxed{}$ 通り存在する。

(3)　n 面ダイスのそれぞれの目の出る確率は $\dfrac{1}{n}$ とする。(i)　4 面ダイスと 8 面ダイスを投げて，出た目の積が 4 の倍数となる確率は $^{オ}\boxed{}$ である。(ii)　4 面ダイスと 6 面ダイスと 8 面ダイスを投げて，出た目の積が 100 以上となる確率は $^{カ}\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$ 2 つのサイコロを同時に振るとき，出た目のうち，最大のものが 4 である確率を求めよ．

$\boxed{4}$ 青球 6 個と赤球 n 個 ($n \geqq 2$) が入っている袋から，3 個の球を同時に取り出すとき，青球が 1 個で赤球が 2 個である確率を P_n とする。このとき，P_n を最大にする n の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

(規則)　さいころを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1) \neq 0$，$X(2) \neq 0$，……，$X(9) \neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

$\boxed{6}$ 1 つのさいころを n 回投げ，出た n 個の目の積を A_n とする．ただし，さいころを 1 回投げたとき，1 から 6 までの各目の出る確率は $\dfrac{1}{6}$ とする．

(1)　$A_n=6$ になる確率を n を用いて表せ．

(2)　$A_n=12$ になる確率を n を用いて表せ．

(3)　A_n が 6 の倍数になる確率を n を用いて表せ．

$\boxed{1}$ 解答　(1) $\dfrac{1}{15}$　(2) $\dfrac{1}{3}$　(3) $\dfrac{1}{18}$　(4) $\dfrac{53}{144}$

$\boxed{2}$ 解答　(1)（ア） 50　(2)（イ） 2　（ウ） 30　（エ） 1680

(3) (i)（オ） $\dfrac{1}{2}$　(ii)（カ） $\dfrac{5}{64}$

$\boxed{3}$ 解答　$\dfrac{7}{36}$

$\boxed{4}$ 解答　(1) $P_n=\dfrac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}$　(2) $n=12$　(3) $n=11,\ 12$

$\boxed{5}$ 解答　(1) $\dfrac{63}{256}$　(2) $\dfrac{1}{16}$　(3) $\dfrac{7}{256}$

$\boxed{6}$ 解答　(1) $n^2\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$　(2) $\dfrac{n(n-1)(n+2)}{2}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$　(3) $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$\boxed{1}$ 6人の座り方は全部で　$6!$ 通り

ただし，「6人が席を入れ換える」の中には，席を動かない場合も含むと解釈する。

(1)　両端の2か所に，助さんと格さんが座る方法は　$2!$ 通り

そのおのおのに対して，残りの4人の座り方は　$4!$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{2!\times4!}{6!}=\dfrac{1}{15}$

(2)　水戸黄門とお銀を1組と考え，この1組と残りの4人の並び方は　$5!$ 通り

そのおのおのに対して，水戸黄門とお銀の並び方は　$2!$ 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{5!\times2!}{6!}=\dfrac{1}{3}$

(3)　最初と同じ席に座る人の選び方は　${}_6C_3$ 通り

そのおのおのに対して，最初と異なる席に座る3人の座り方は　2通り

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_6C_3\cdot2}{6!}=\dfrac{20\cdot2}{6!}=\dfrac{1}{18}$

(4)　n 個の数 1，2，……，n の順列に対して，どの数も最初の位置にない順列を $f(1)$，$f(2)$，……，$f(n)$ とし，この順列の個数を a_n とする。

$f(1)=k$ $(2\leqq k\leqq n)$ とすると，この順列は次の[1]，[2]のどちらかである。

[1]　$f(k)=1$ であるもの

1，k を除いた 2，……，$k-1$，$k+1$，……，n の $n-2$ 個について，どの数も最初の位置にないから，その個数は　a_{n-2} 個

[2]　$f(k)\neq1$ であるもの

$f(h)=1$ とすると，$h\neq k$ であるから，$f(1)=1$，$f(h)=k$ とおき換えると，1を除いた 2，……，n の $n-1$ 個について，どの数も最初の位置にないから，その個数は

a_{n-1} 個

$2\leqq k\leqq n$ であるから，k のとりうる値は　$n-1$ 通り

したがって　$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$　$(n\geqq3)$

$a_2=1$，$a_3=2$ であるから

$a_4=3(a_3+a_2)=3(2+1)=9$，　$a_5=4(a_4+a_3)=4(9+2)=44$，

$a_6=5(a_5+a_4)=5(44+9)=265$

よって，求める確率は　$\dfrac{265}{6!}=\dfrac{53}{144}$

参考　一般に，n 個の文字の順列（例えば4文字の順列 $abcd$）に対して，どの文字も最初の位置にない順列（a は1番目にない，b は2番目にない，c は3番目にない，d は4番目にない順列，$bcda$ や $cdab$ など）を完全順列という。

$\boxed{2}$ (1)　正多面体は，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の5種類のみであるから　$n=4$，6，8，12，20

よって，求める和は　$4+6+8+12+20={}^{ア}50$

(2)　$n=4$ すなわち 正四面体のとき

1 を底面に書くとすると，残りの 3 つの面の数字の書き方は　$(3-1)!={}^{イ}2$ (通り)

$n=6$ すなわち 正六面体のとき

1 を底面に書くとすると，上面の数字の書き方は　5 通り

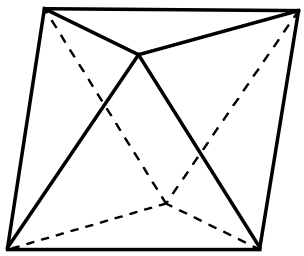
残りの 4 つの側面の数字の書き方は　$(4-1)!=6$ (通り)

よって，正六面体の各面の数字の書き方は　$5\times6={}^{ウ}30$ (通り)

$n=8$ すなわち 正八面体のとき

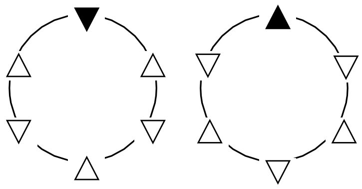
1 を上面に書くとすると，底面の数字の書き方は

7 通り



次に，右の図のように，上面と 1 辺を共有する 3 つの正三角形 (これを ▽ と表す) と，頂点のみを共有する 3 つの正三角形 (これを △ と表す) がある。

上面からみて，▼，▲ で示した面に任意の 1 つの数字を書き，固定して考える。



このとき，数字の並べ方は

$2\times(6-1)!=240$ (通り)

よって，正八面体の各面の数字の書き方は

$7\times240={}^{エ}1680$ (通り)

(3)　(i)　4 面ダイスと 8 面ダイスを投げて出た目の積が 4 の倍数となるのは，次の場合である。

[1]　4 面ダイスは奇数の目，8 面ダイスは 4 または 8 の目が出るとき

$$\frac{2}{4}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{8}$$

[2]　4 面ダイスは 2 の目，8 面ダイスは偶数の目が出るとき　$\frac{1}{4}\times\frac{4}{8}=\frac{1}{8}$

[3]　4 面ダイスは 4 の目，8 面ダイスは任意の目が出るとき　$\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$

[1] ～ [3] から，求める確率は　$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}={}^{オ}\frac{1}{2}$

(ii)　4 面ダイス，6 面ダイス，8 面ダイスの目をそれぞれ x，y，z とする。

x，y，z の組の総数は　$4\times6\times8=192$ (通り)

$xyz\geqq100$ となる x，y，z は

$(x,\ y,\ z)=(3,\ 5,\ 7),\ (3,\ 5,\ 8),\ (3,\ 6,\ 6),\ (3,\ 6,\ 7),\ (3,\ 6,\ 8),$
$(4,\ 4,\ 7),\ (4,\ 4,\ 8),\ (4,\ 5,\ 5),\ (4,\ 5,\ 6),\ (4,\ 5,\ 7),$
$(4,\ 5,\ 8),\ (4,\ 6,\ 5),\ (4,\ 6,\ 6),\ (4,\ 6,\ 7),\ (4,\ 6,\ 8)$

の 15 通りある。

よって，求める確率は　$\frac{15}{192}={}^{カ}\frac{5}{64}$

3　2つのサイコロを同時に振るときの目の出方は 6^2 通り．

出た目のうち，最大のものが4以下であるような目の出方は 4^2 通り，最大のものが3以下であるような目の出方は 3^2 通り．

ゆえに，最大のものが4である目の出方は　$4^2-3^2=7$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{7}{6^2}=\dfrac{7}{36}$

4　(1)　袋の中には合計 $n+6$ 個の球が入っているから

$$P_n=\frac{{}_6C_1\cdot{}_nC_2}{{}_{n+6}C_3}=\frac{6n(n-1)}{2}\cdot\frac{6}{(n+6)(n+5)(n+4)}=\frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}$$

(2)　$n\geqq 2$ より，$P_n>0$ であるから，$P_n>P_{n+1}$ は $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}<1$ と同値である。ここで

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{18n(n+1)}{(n+7)(n+6)(n+5)}\cdot\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{18n(n-1)}=\frac{(n+1)(n+4)}{(n+7)(n-1)}$$

ゆえに　$\dfrac{(n+1)(n+4)}{(n+7)(n-1)}<1$

分母を払って　$(n+1)(n+4)<(n+7)(n-1)$

整理すると　$n>11$

$n>11$ を満たす最小の自然数は　$n=12$

(3)　(2) と同様にして　$n<11$ のとき　$P_n<P_{n+1}$，

$n=11$ のとき　$P_n=P_{n+1}$

ゆえに　$P_2<\cdots\cdots<P_{10}<P_{11}$，$P_{11}=P_{12}$

(2) の結果から　$P_{12}>P_{13}>P_{14}>\cdots\cdots$

よって，P_n を最大にする n の値は　$n=11$，12

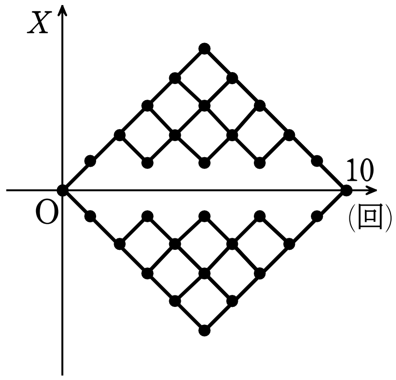
5　(1)　奇数，偶数ともに5回ずつ出る場合であるから，求める確率は

$$ {}_{10}C_5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=252\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{63}{256}$$

(2)　(1) と同様に奇数，偶数ともに5回ずつ出ればよいが，起こる順の決め方は，右図の経路の数と同じ28通り。

求める確率は

$$28\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{256}$$



$\boxed{6}$ ⑴　$6=6\times1=2\times3$ であるから，$A_n=6$ となるのは，次のいずれかである．

[1]　6 の目が 1 回，あとは 1 の目が出る場合

[2]　2 の目が 1 回，3 の目が 1 回，あとは 1 の目が出る場合

よって，$A_n=6$ になる確率は　$n\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+n(n-1)\times\left(\frac{1}{6}\right)^n=n^2\left(\frac{1}{6}\right)^n$

⑵　$12=2\times2\times3=3\times4=2\times6$ であるから，$A_n=12$ となるのは，次のいずれかである．

[1]　2 の目が 2 回，3 の目が 1 回，あとは 1 の目が出る場合

[2]　3 の目が 1 回，4 の目が 1 回，あとは 1 の目が出る場合

[3]　2 の目が 1 回，6 の目が 1 回，あとは 1 の目が出る場合

よって，$A_n=12$ になる確率は

$$\left\{{}_n\mathrm{C}_2\times(n-2)+n(n-1)+n(n-1)\right\}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{n(n-1)(n+2)}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

⑶　少なくとも 1 回 3 または 6 が出る事象を A,

少なくとも 1 回 2 または 4 または 6 が出る事象を B,

少なくとも 1 回 2 または 3 または 4 または 6 が出る事象を C

とすると，A_n が 6 の倍数になる確率は

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{C})&=\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}+\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}\\&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$