試験時間60分　　解答は<u>解答用紙</u>に書いて、提出してください

$\boxed{1}$ 3つの直線 $x+3y=0$，$-x+3y=1$，$ax+2y=-1$ が三角形を作らないとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 直線 $(1+k)x-(1-3k)y=-7k-1$ は，定数 k の値に関係なく，定点を通る。その定点の座標を求めよ。

$\boxed{3}$ 点 A$(-1,\ 7)$ から円 $x^2+y^2=25$ に引いた接線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 円 $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ と直線 $7x-y+2=0$ の2つの交点 A，B を通り，点 $(-1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

$\boxed{5}$ 中心が点 $(2,\ 2)$ で，円 $x^2+y^2-2y-19=0$ に接する円の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ xy 平面上に，放物線 $y=x^2-tx+t^2+1$ がある。t がすべての実数値をとって変わるとき，この放物線の頂点の軌跡の方程式を求めよ。

$\boxed{7}$ 座標平面上に3点 A$(0,\ 8)$，B$(4,\ 0)$，C と点 P$(5,\ 3)$ がある。点 P と直線 AB の距離が点 P と直線 BC の距離に等しく，2直線 AB と BC は一致しないとき，直線 BC の方程式を求めると，$y=$ ${}^{ア}\boxed{}$ である。更に，点 P が三角形 ABC の内心であるとき，点 C の座標は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{8}$ 座標平面において，$|y| \leqq -a|x|+1$（a は正の定数）が表す領域の面積を求めよ。また，点 $(x,\ y)$ がこの領域を動くとき，x^2+y^2 の最大値を a の値で場合分けして答えよ。

$\boxed{9}$ 1の3乗根のうち虚数であるものの1つを ω とする。

このとき，$(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)$ の値は ${}^{ア}\boxed{}$ である。

また，$\displaystyle\sum_{k=0}^{6} {}_6\mathrm{C}_k\omega^k$ の値は ${}^{イ}\boxed{}$ となる。

$\boxed{1}$ 解答　$a=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{8}{3}$

$\boxed{2}$ 解答　$\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

$\boxed{3}$ 解答　接線 $-4x+3y=25$，接線 $3x+4y=25$

$\boxed{4}$ 解答　$x^2+y^2+9x+3y-2=0$

$\boxed{5}$ 解答　$(x-2)^2+(y-2)^2=5$，$(x-2)^2+(y-2)^2=45$

$\boxed{6}$ 解答　$y=3x^2+1$

$\boxed{7}$ 解答　(ア)　$\dfrac{1}{2}x-2$　　(イ)　$(10,\ 3)$

$\boxed{8}$ 解答　$a \geqq {}^{イ}1$ の場合には $p=q=1$ となり，

$a<1$ の場合には $p={}^{ウ}\dfrac{1}{a}$，$q={}^{エ}\dfrac{1}{a^2}$ となる。

$\boxed{9}$ 解答　(ア)　4　　(イ)　1

$\boxed{1}$

$$x+3y=0 \quad \cdots\cdots ①,$$
$$-x+3y=1 \quad \cdots\cdots ②,$$
$$ax+2y=-1 \quad \cdots\cdots ③$$

直線 ①，②，③ の傾きは，それぞれ　$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{a}{2}$

3 つの直線が三角形を作らないのは，次の [1]，[2]，[3] の場合である。

[1]　① と ③ が平行のとき　$-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{a}{2}$

　これを解いて　$a=\dfrac{2}{3}$

[2]　② と ③ が平行のとき　$\dfrac{1}{3}=-\dfrac{a}{2}$

　これを解いて　$a=-\dfrac{2}{3}$

[3]　3 つの直線が 1 点で交わるとき

　①，② を連立させた方程式を解くと　$x=-\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{6}$

　よって，2 直線 ①，② の交点は　$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{6}\right)$

　この交点が直線 ③ 上にあるから　$-\dfrac{1}{2}a+2\cdot\dfrac{1}{6}=-1$

　これを解いて　$a=\dfrac{8}{3}$

したがって，求める a の値は　$a=-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{8}{3}$

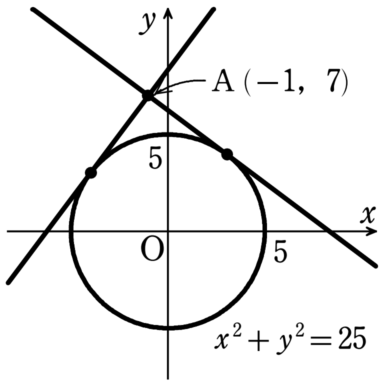
$\boxed{2}$ 与えられた直線の方程式を，k について整理すると

$$(x-y+1)+k(x+3y+7)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

連立方程式 $\begin{cases} x-y+1=0 & \cdots\cdots ② \\ x+3y+7=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ の解 $(x,\ y)$ は，k の値に関係なく ① を満たす。

②，③ を解くと　$x=-\dfrac{5}{2}$，$y=-\dfrac{3}{2}$

よって，直線 ① は，k の値に関係なく，定点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$ を通る。



3 接点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とすると，点 P は円上にあるから

$$p^2+q^2=25 \quad \cdots\cdots ①$$

また，点 P における円の接線の方程式は

$$px+qy=25$$

この直線が点 $\mathrm{A}(-1,\ 7)$ を通るから

$$-p+7q=25$$

ゆえに　　$p=7q-25$　……②

② を ① に代入して　　$(7q-25)^2+q^2=25$

整理すると　　$q^2-7q+12=0$　すなわち　$(q-3)(q-4)=0$

よって　　$q=3,\ 4$

② から　　$q=3$ のとき　$p=-4$，　$q=4$ のとき　$p=3$

よって，接線は 2 本あり，その方程式と接点の座標は，次のようになる。

接線 $-4x+3y=25$，接点 $(-4,\ 3)$；接線 $3x+4y=25$，接点 $(3,\ 4)$

4 k を定数とする。方程式

$$(x^2+y^2+2x+4y-4)+k(7x-y+2)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

は 2 点 A，B を通る円を表す。

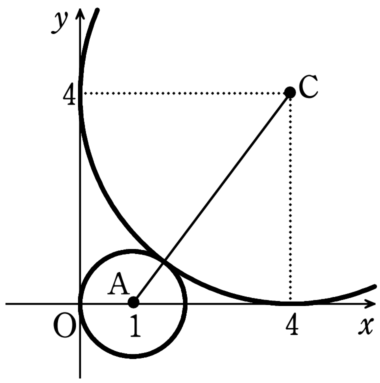
① に $x=-1$，$y=2$ を代入すると

$$7-7k=0 \quad \text{すなわち} \quad k=1$$

① に代入して

$$x^2+y^2+2x+4y-4+(7x-y+2)=0$$

すなわち　　$x^2+y^2+9x+3y-2=0$



5 (1)　$x^2+y^2-2x=0$ を変形すると

$$(x-1)^2+y^2=1 \quad \cdots\cdots ①$$

これは中心が $\mathrm{A}(1,\ 0)$，半径が 1 の円を表す。

中心 A，C 間の距離 d は

$$d=\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2}=5$$

よって，求める円の半径を r とすると

$$5=r+1$$

すなわち　　$r=4$

したがって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y-4)^2=16$$

(2)　$x^2+y^2-2y-19=0$ を変形すると

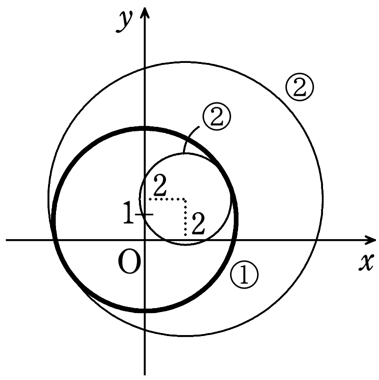
$$x^2+(y-1)^2=20 \quad \cdots\cdots ①$$

これは中心が $(0,\ 1)$，半径が $2\sqrt{5}$ の円を表す。

求める円の半径を r とする。

中心が $(2,\ 2)$ であるから，円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2=r^2 \quad \cdots\cdots ②$$



2 円 ①，② の中心間の距離を d とすると

$$d=\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$

円 ② の中心 $(2,\ 2)$ は円 ① の内部にあるから，

2 円が接するのは，次の 2 つの場合がある。

[1]　円 ② が円 ① に内接する。

[2]　円 ① が円 ② に内接する。

[1] の場合　$d=2\sqrt{5}-r$　　よって　$r=\sqrt{5}$

[2] の場合　$d=r-2\sqrt{5}$　　よって　$r=3\sqrt{5}$

以上から，求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2=5,\ (x-2)^2+(y-2)^2=45$$

$\boxed{6}$ $y=x^2-tx+t^2+1$ を変形すると　　$y=\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}t^2+1$

この放物線の頂点の座標は　　${}^{ア}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{3}{4}t^2+1\right)$

頂点の座標を $(x,\ y)$ とすると　　$x=\dfrac{t}{2}$ ……①，　$y=\dfrac{3}{4}t^2+1$ ……②

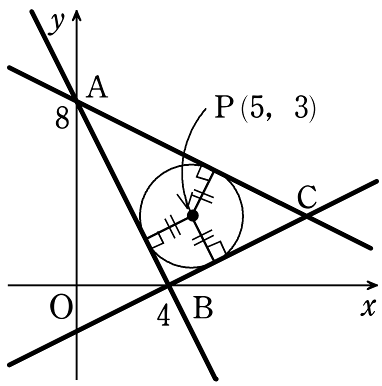
① から　　$t=2x$　　　② に代入して　　${}^{イ}y=3x^2+1$

これが頂点の軌跡の方程式である。

$\boxed{7}$ 直線 AB の方程式は

$$y=-2x+8$$

すなわち　　$2x+y-8=0$



よって，点 P と直線 AB の距離は

$$\frac{|2\cdot 5+3-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

ここで，点 P と直線 $x=4$ の距離は，$|5-4|=1\neq\sqrt{5}$

であるから，直線 $x=4$ は直線 BC ではない。

したがって，直線 BC の方程式は

$$y=m(x-4) \quad すなわち \quad mx-y-4m=0$$

とおける。

点 P とこの直線の距離が $\sqrt{5}$ であるから

$$\frac{|5m-3-4m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5} \qquad よって \qquad |m-3|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$$

両辺を 2 乗すると　$m^2-6m+9=5(m^2+1)$

ゆえに　$2m^2+3m-2=0$　すなわち　$(2m-1)(m+2)=0$

2 直線 AB，BC は一致しないから　$m \neq -2$　よって　$m=\dfrac{1}{2}$

したがって，直線 BC の方程式は

$$y=\frac{1}{2}(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y={}^{ア}\frac{1}{2}x-2 \quad \cdots\cdots ①$$

直線 AC は x 軸に垂直でないから，その方程式は

$$y=ax+8 \quad \text{すなわち} \quad ax-y+8=0$$

とおける。

点 P が △ABC の内心であるとき，点 P と直線 AC の距離も $\sqrt{5}$ であるから

$$\frac{|5a-3+8|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5} \qquad \text{よって} \qquad 5|a+1|=\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}$$

両辺を 2 乗して　$25(a^2+2a+1)=5(a^2+1)$

ゆえに　$2a^2+5a+2=0$　すなわち　$(2a+1)(a+2)=0$

2 直線 AB，AC は一致しないから　$a \neq -2$　よって　$a=-\dfrac{1}{2}$

したがって，直線 AC の方程式は　$y=-\dfrac{1}{2}x+8$　$\cdots\cdots$ ②

①，② を連立して解くと　$x=10$，$y=3$

よって，点 C の座標は　${}^{イ}(10,\ 3)$

$\boxed{8}$ $|y| \leqq -a|x|+1$ は

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき　$y \leqq -ax+1$

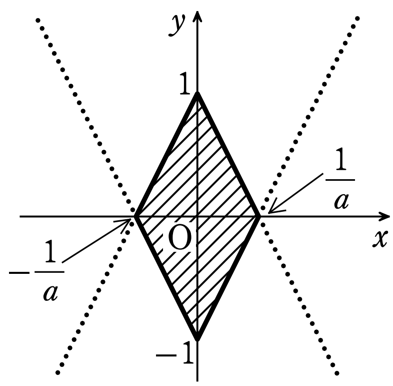
$x \geqq 0$，$y<0$ のとき　$y \geqq ax-1$

$x<0$，$y \geqq 0$ のとき　$y \leqq ax+1$

$x<0$，$y<0$ のとき　$y \geqq -ax-1$

また，$|y|=-a|x|+1$ で $y=0$ とすると

$$x=\pm\frac{1}{a}$$



不等式 $|y| \leqq -a|x|+1$ の表す領域を D とすると，

領域 D は，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

よって，領域 D の面積は

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot 2={}^{ア}\frac{2}{a}$$

次に，$x^2+y^2=l$ $\cdots\cdots$ ② とおくと，$l>0$ のとき，② は原点を中心とする半径 $\sqrt{l}$ の円を表す。

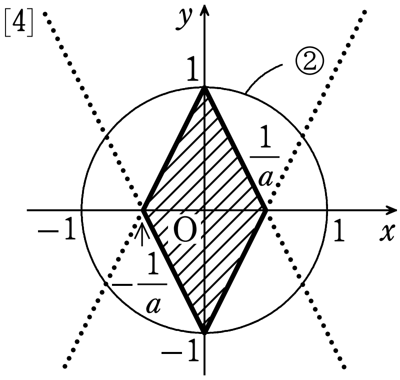
この円②が領域 D と共有点をもつような l の値の最大値について考える。

[4]　$a>1$ のとき

円②が点 $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$ を通るとき最大になる。

そのときの最大値は

$$q=1$$



[5]　$a=1$ のとき

円②が 点 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ -1)$ を

通るとき最大になる。

そのときの最大値は

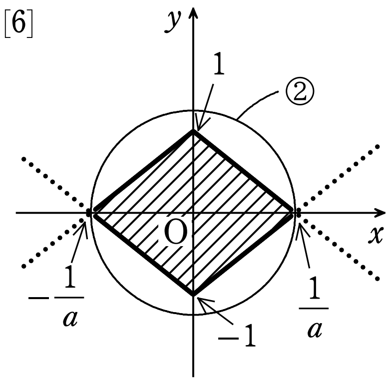
$$q=1$$

[6]　$a<1$ のとき

円②が点 $\left(\pm\dfrac{1}{a},\ 0\right)$ を通るとき最大になる。

そのときの最大値は

$$q=\frac{1}{a^2}$$



以上から，$a\geqq{}^{イ}1$ の場合には $p=q=1$ となり，

$a<1$ の場合には $p={}^{ウ}\dfrac{1}{a}$，$q={}^{エ}\dfrac{1}{a^2}$ となる。

$\boxed{9}$ (ア)　$(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=\{1+(\omega-\omega^2)\}\{1-(\omega-\omega^2)\}$

$$=1-(\omega-\omega^2)^2=1-\omega^2+2\omega^3-\omega^4$$

$$=1-\omega^2+2-\omega=3-(\omega^2+\omega)$$

$$=3-(-1)={}^{ウ}4$$

(イ)　二項定理により　　$\displaystyle\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k\omega^k=(1+\omega)^6$

$1+\omega=-\omega^2$ であるから　　$(1+\omega)^6=(-\omega^2)^6=\omega^{12}=(\omega^3)^4=1^4={}^{エ}1$