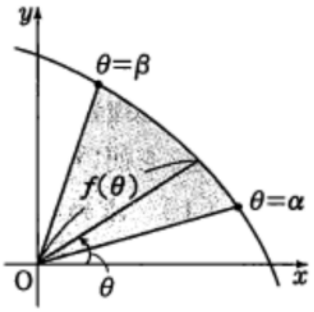
数学Ⅲの積分の応用　チェックリスト

○　軸との間の面積（数学 II でも扱った）

○　交点を文字設定（便宜上）⇒文字の満たす条件式を使って面積計算

○　極座標面積

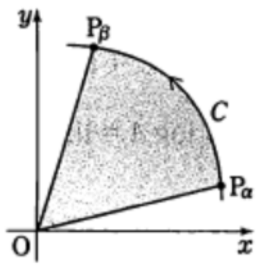


$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

○　Gauss-Green の公式

ガウス-グリーンの公式

曲線 C 上の点 $P_\theta(x,\ y)$ が $x=f(\theta)$, $y=g(\theta)$ とパラメータ表示されているとする．θ が増加するとき，点 P_θ が原点から見て左回りに動くものとするとき，曲線 C の $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ の部分と OP_α, OP_β で囲まれる部分の面積は



$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(\theta)g'(\theta)-g(\theta)f'(\theta)\}\,d\theta$$

で与えられる．ただし，α, β は $\alpha<\beta$ を満たす定数.

【例題 01】2014 東邦

xy 平面上の曲線 C は媒介変数 $t\ (0\leqq t\leqq 2)$ を用いて

$$x=t(2-t),\ y=t(2-t)^2$$

と表される。曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

○　$I_n=\int_0^{\pi}|\sin nx|dx$　（n は自然数）は n の値によらず一定値 2 をとる

○　x 軸回転体体積　$V_x=\int_{x_1}^{x_2}\pi y^2 dx$

○　y 軸回転体体積（１）　$V_y=\int_{y_1}^{y_2}\pi x^2 dy$　に $y=f(x)$ を x について解いた式を代入

○　y 軸回転体体積（２）　$V_y=\int_{y_1}^{y_2}\pi x^2 dy=\int_{x_1}^{x_2}\pi x^2\frac{dy}{dx}dx$　つまり置換積分

○　y 軸回転体体積（３）　バウムクーヘン分割（円筒分割）
$y=f(x)$ と x 軸との間 $a\leqq x\leqq b$ の部分を y 軸の周りに回転してできる立体の体積は，
$V_y=\int_{x_1}^{x_2}2\pi xf(x)dx$

○　Pappus-Guldin の定理　回転体体積は，面積が重心に集中しているとみなして求められる。
【例題】2008 杏林

○　非回転体体積処理　⇒　断面積を垂直に積分すると体積
(StepI)　x 軸に垂直に切る
(StepII)　切り口の断面積を x で表す
(StepIII)　それを積分すれば体積　$V=\int_a^b S(x)dx$

○　不等式で表された立体の体積　⇒　登場回数最多の文字を固定

○　板の回転　⇒　回転軸を含む平面に射影してから回転しても体積は不変

○　タマ台（球の一部）＝円の一部の回転体体積

○　一葉双曲面

○　斜回転体体積
$y=f(x)$ と $y=(\tan\theta)x$ の間($a\leqq x\leqq b$)の部分を
$y=(\tan\theta)x$ の周りに回転してできる立体の体積 V は，
$V=\int_a^b \pi \mathrm{PQ}^2\cos\theta dx$
【例題】2014 獨協

○　区分求積法

○　弧長

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ s は，

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ s は

$$s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

【例題 02】2008 杏林

座標平面上で

$$9x^2-54x+4y^2+45=0 \quad \cdots\cdots ①$$

で表される楕円 C がある．①を x について解くと，C は

$$x=\boxed{\text{ア}}-\frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}-y^2}}{\boxed{\text{エ}}} \quad \cdots\cdots ②$$

$$x=\boxed{\text{オ}}+\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}-y^2}}{\boxed{\text{ク}}} \quad \cdots\cdots ③$$

という 2 曲線で表される．x 軸に平行な C の 2 つの接線を l_1，l_2 とする．曲線②，l_1，l_2 および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，$\boxed{\text{ケコサ}}\pi^2+\boxed{\text{シス}}\pi$ となり，曲線③，l_1，l_2 および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，$\boxed{\text{セソ}}\pi^2+\boxed{\text{タチ}}\pi$ となる．C を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，$\boxed{\text{ツテ}}\pi^2$ である．さらに，$x^2-6x+y^2+8=0$ で表される円と C によって囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は，$\boxed{\text{トナ}}\pi^2$ となる．

【例題 03】2012 東邦

$0\leqq t\leqq\sqrt{2}$ を定義域とする t の関数 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}\left|t-\sqrt{2-\frac{4}{3}x}\right|dx$ の最小値は

$\boxed{\text{ハヒ}}+\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$ である。

物理的問題

○ 平面上の点の運動の速度，加速度

座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標を $(x,\ y)$ とする。

$x=f(t)$，$y=g(t)$ とすると，

位置ベクトル　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$

速度ベクトル　$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(f'(t),\ g'(t))$

速さ　$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

加速度ベクトル　$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t),\ g''(t))$

加速度ベクトルの大きさ　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

○ 平面上の運動における道のり

座標平面上で，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が曲線 C 上を動き，x，y が時刻 t の関数として

$x=f(t)$，　$y=g(t)$　$(\alpha\leqq t\leqq\beta)$　と表されているとする。

点Pの時刻 t における速度を $\vec{v}$ とすると，

道のり　$s=\displaystyle\int_\alpha^\beta|\vec{v}|dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

○　近似式

$x\doteqdot a$ のとき，$f(x)\doteqdot f(a)+f'(a)(x-a)$　つまり一次近似＝接線

○　水の問題　$dV=S\cdot dh$

【例題04】

曲線 $y=x(1-x)$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1)　水面の上昇する速度を水面の高さ h の関数として表せ。

(2)　空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

積分と漸化式

○$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$ のとき，$I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$

○$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,\ J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$　のとき

①　区間逆走で，$I_n=J_n$

②　一個セパレートで，$I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$　　⇒ジグザグカウントダウン

○Beta 関数

$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$　のとき，

$$I(m,n)=\frac{n}{m+1}I(m+1,n-1)$$ より，

$$I(m,n)=\frac{m!\ n!}{(m+n+1)!}$$

○$\tilde{I}(m,n)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx=\dfrac{m!\ n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

$t=(\beta-\alpha)x+\alpha$ の置換で Beta 関数に帰着（面積公式の一般化）

○$I_n=\int_0^e(\log x)^n dx$　のとき，$I_n=e-nI_{n-1}$

○$I_n=\dfrac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt$　のとき，$I_{n+1}=I_n-\dfrac{1}{(n+1)!\,e}$

【例題 05】

数列 $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,3,\,\dots}$ を $a_n=\dfrac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^{-t}dt$ で定める．ここで e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

（1）$0\leqq\int_0^1 t^n e^{-t}dt\leqq 1-e^{-1}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）を示せ．

（2）$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ を示せ．

（3）$a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{(n+1)!e}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）を示せ．

（4）$e=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ を示せ．　　　（高知大・理）

積分と級数

○メルカトル級数

$$\boxed{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-x)^{n-1}=\frac{1-(-x)^n}{1+x}}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ で定積分 $\displaystyle\int_0^1\left\{1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-x)^{n-1}\right\}dx=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx$

$$\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]_0^1=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1-(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}=\log 2-(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$ より，

$$\boxed{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots=\log 2}$$

○ライプニッツ級数

$$\boxed{1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-x)^{2(n-1)}=\frac{1-\left(-x^2\right)^n}{1+x}}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ で定積分 $\displaystyle\int_0^1\left\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-x)^{2(n-1)}\right\}dx=\int_0^1\frac{1-\left(-x^2\right)^n}{1+x^2}dx$

$$\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right]_0^1=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x}dx$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx=0$ より，

$$\boxed{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}}$$

積分と不等式（評価），そして極限

○数列の和＝棒グラフとみなして，定積分＝面積と比較

○被積分関数の評価から，定積分の評価を作る

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 数Ⅲ積分の応用篇

標準問題

③**7-標-1**

関数 $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\pi\right)$（$0\leqq x\leqq 4$）に対し，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

③**7-標-2**

曲線 $y^2=x^2\left(4-x^2\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

③**7-標-3**

曲線 $2x^2+2xy+y^2=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

③**7-標-4**

平面上で，原点 O から曲線 $y=(9-2x)e^x$ に 2 本の接線を引き，その接点を P，Q とする。2 つの線分 OP，OQ と曲線の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

③**7-標-5**

曲線 $y=-\log ax$（$a>0$）と，原点を中心とするある円とが，x 座標が 1 となる点で接している。このとき a の値を定め，曲線，円および x 軸の正の部分で囲まれる部分の面積 S を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

③ 7-標-6

関数 $y=\tan x\ \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y=f(x)$ とするとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値を求めよ。

③ 7-標-7

$f(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x-t\sin x|dx$ とおく。関数 $f(t)$ の $t>0$ における最小値を求めよ。

③ 7-標-8

曲線 $y=e^{mx}\ (m>0,\ x\geqq 0)$ に原点Oから引いた接線の接点をP，Pから y 軸におろした垂線の足をとする。△OPQ内で $y\geqq e^{mx}$ の成り立つ部分を A_1，残りを A_2 とし，A_1，A_2 が y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とする。$\dfrac{V_1}{V_2}$ の値を求めよ。

③ 7-標-9

区間 $0\leqq x\leqq\pi$ において，2点 $\mathrm{P}\left(x, x+\sin^2 x\right)$，$\mathrm{Q}\left(x, \pi\right)$ を考え，1辺はPQ，他の1辺は長さが $\sin x$ である長方形（特別な場合は線分あるいは点）を，x 軸に垂直な平面上に作る。点P，Qの x 座標が0から π まで動くとき，この長方形が描く立体図形の体積を求めよ。

③ 7-標-10

$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

③**7-標-11**

関数$y=f(x)=\log\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{1-x^2}$ について，次の問いに答えよ。

（1）$y=f(x)$のグラフをかけ。

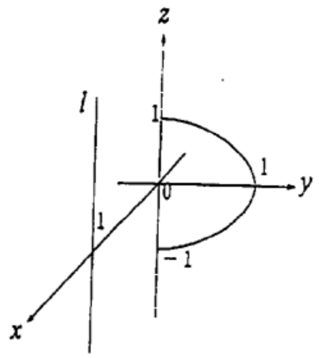
（2）曲線$y=f(x)$と 2 直線$y=0$，$y=a$ $(a>0)$およびy 軸で囲まれた部分をy 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を$V(a)$とする。このとき，極限値$\lim\limits_{a\to\infty}V(a)$を求めよ。

③**7-標-12**

放物線$y=x^2-1$のx軸より下の部分を，y 軸のまわりに回転して得られる容器をUとする。Uに水を満たし，そのあとで半径 1 の鉄球をUに静かに入れたとき，残った水の体積を求めよ。

③**7-標-13**

xyz 空間において，点$(1, 0, 0)$を通りz軸に平行な直線をlとする。yz 平面内にあって，$y=1-z^2$で表される曲線の$-1\leqq z\leqq 1$ なる部分を，直線lのまわりに回転してできる曲面と，平面$z=1$および，$z=-1$とによって囲まれる部分の体積を求めよ。



③**7-標-14**

$$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\y=a(1-\cos\theta)\end{cases}\quad \left(0\leqq\theta\leqq 2\pi,\ a\text{は定数で }a>0\right)$$ で表される曲線C がある。

（1）　曲線Cの概形をかけ。

（2）　曲線Cとx軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

（3）　曲線Cとx軸で囲まれる部分をx軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

発展問題

③**7-発-1**

　z軸を軸とする半径1の円柱の側面で，xy 平面より上（z軸の正の方向）にあり，平面 $x-\sqrt{3}y+z=1$ より下（z軸の負の方向）にある部分をDとする。Dの面積を求めよ。

③**7-発-2**

$x^2-xy+y^2=1$ の $y\geqq 0$ の部分を x 軸のまわりに回転した立体の体積を求めよ。

③**7-発-3**

正四面体Tと半径1の球面Sとがあって T の6つの辺がすべてSに接しているという。

(1)　Tの一辺の長さを求めよ。

(2)　Tの外側にあって，Sの内側にある部分の体積を求めよ。

③**7-発-4**

座標空間において，2点$\mathrm{P}(2,0,0)$，$\mathrm{Q}(2,0,9)$を結ぶ線分PQをz軸のまわりに回転して得られる曲面と，平面$z=0$および平面$3x+z-3=0$で囲まれる立体の体積を求めよ。

③7-発-5

xyz 空間において条件

$$x^2+y^2 \leqq z^2,\ z^2 \leqq x,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

を満たす点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える。この立体の体積をV とし，$0 \leqq k \leqq 1$ に対し，z軸に直交する平面$z=k$ による切り口の面積を$S(k)$とする。

(1) $k=\cos\theta$ とおくとき，$S(k)$をθ で表せ。ただし，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) V の値を求めよ。

③7-発-6

Dを半径 1 の円板，C をxy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。Dが次の条件(a)，(b)を共に満たしながらxyz 空間内を動くとき，Dが通過する部分の体積を求めよ。

(a)　Dの中心はC 上にある。

(b)　Dが乗っている平面は常にベクトル$(0, 1, 0)$と直交する。

③7-発-7

xyz 空間において，$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$によって表される立体の体積を求めよ。

③7-発-8

x軸，y 軸，z軸を軸とする半径 1 の 3 個の直円柱T_1，T_2，T_3 がある。

(1) T_1とT_2の内部の共通部分の体積を求めよ。

(2) T_1とT_2およびT_3の内部の共通部分の体積を求めよ。

③$\boxed{7\text{-発-}9}$

xy 平面上に円板 $D: x^2+y^2 \leqq 4,\ z=0$ がある。

平面 $z=1$ 上に，点 $(0, 0, 1)$ を重心にもち，頂点の 1 つが A$(0, 3, 1)$ の正三角形 T（内部を含む）がある。

点 Q が D 全体を動くとき，線分 AQ の通過する領域を V_1 とする。

また，点 P が T 全体を動き，点 Q が D 全体を動くとき，線分 PQ の通過する領域を V_2 とする。

③$\boxed{7\text{-発-}10}$

座標空間において，平面 $z=1$ 上に一辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。点 A，B，C から平面 $z=0$ におろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。動点 P は A から B の方向へ出発し，一定の速さで△ABC の周を一周する。動点 Q は同時に E から F の方向へ出発し，P と同じ一定の速さで△DEF の周を一周する。線分 PQ が通過してできる曲面と△ABC，△DEF によって囲まれる立体を V とする。

(1) 平面 $z=a\ (0 \leqq a \leqq 1)$ による V の切り口はどのような図形か。

(2) V の体積を求めよ。

③$\boxed{7\text{-発-}11}$

$\begin{cases} x=\sin 2\theta \\ y=\sin 3\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。

(1)　C の概形を図示せよ。

(2)　C が囲む部分を y 軸中心に回転してできた立体の体積を求めよ。

③$\boxed{\text{7-発-12}}$

曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $(0,\ 0),\ (\pi,\ 0)$ でのこの曲線の接線とで囲まれた図形を直線 $y=x$ のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

③$\boxed{\text{7-発-13}}$

xyz 空間内の平面 $y=1$ 上で，$(x-1)^2+z^2 \leqq 1,\ y=1$ で表される図形を D とする。D を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を M とする。

(1)　平面 $z=h\ (-1 \leqq h \leqq 1)$ による立体 M の切り口の面積を求めよ。

(2)　立体 M の体積を求めよ。

③$\boxed{\text{7-発-14}}$

xyz 空間内に, 3 点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{1}{2}, 0\right),\ \mathrm{Q}\left(1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{R}\left(\dfrac{1}{4},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を頂点とする正三角形の板 S がある。S を z 軸のまわりに一回転させたとき，S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

③$\boxed{\textbf{7-発-15}}$

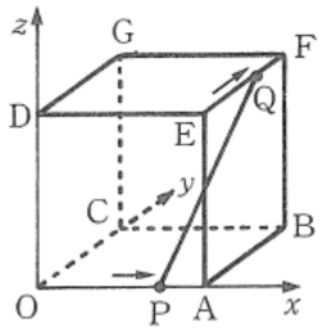
xyz 空間で，xy 平面上の原点を中心とし半径が 1 の円を C とする．2 点 A(0, 0, 1)，B(1, 0, 1) を結ぶ線分 AB 上に点 P をとり，P を頂点とし円 C を底面とする円すいを考え，P を A から B まで動かすとき，このような円すい全体でつくられる立体を D とする．

(1) 平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ でこの立体 D を切った切り口の面積を求めよ．

(2) 立体 D の体積を求めよ．

③$\boxed{\textbf{7-発-16}}$

図のように xyz 空間に一辺の長さが 1 の立方体 DEFG-OABC がある．2 つの動点 P，Q はそれぞれ O，E を同時に出発し，P は正方形 OABC 上をこの順に 1 周し，Q は P と同じ速さで正方形 EFGD 上をこの順に 1 周する．このとき線分 PQ が通過してできる曲面と正方形 OABC，正方形 EFGD によって囲まれる立体を K とする．



(1) 平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ でこの立体 K を切った切り口の面積を求めよ．

(2) 立体 K の体積を求めよ．

③$\boxed{\textbf{7-発-17}}$

一辺の長さが 1 の立方体を，中心を通る対角線のうちの 1 本を軸として回転させたとき，この立方体が通過する部分の体積を求めよ。