数列の応用

群数列

（１）各群の個数を数える
（２）各群の個数の和をとると各群の末尾までの項数が求まる。

格子点

格子点の総数の数え方（平面）

Step1　タテ($x=k$)に切る，またはヨコ($y=k$)に切る

Step2　$x=k$，または $y=k$ 上の格子点を数える。

Step3　それらをすべて足しあわせる

数学的帰納法

Type1　二項間型

(1)　$n=1$ のときを証明

(2)　$n=k$ のときを仮定して $n=k+1$ のときを証明

⇒　すべての自然数 n で成立する

Type2　三項間型

(1)　$n=1$ および $n=2$ のときを証明

(2)　$n=k,\ k+1$ のときを仮定して $n=k+2$ のときを証明

⇒　すべての自然数 n で成立する

Type3　S_n 型

(1)　$n=1$ のときを証明

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ のときを仮定して $n=k+1$ のときを証明

⇒　すべての自然数 n で成立する

Type4　連立型　２つの命題 $P(n),\ Q(n)$ の証明

(1)　$n=1$ のとき，つまり $P(1),\ Q(1)$ を証明

(2)　$n=k$ つまり $P(k),\ Q(k)$ を仮定して，

　　$n=k+1$ つまり $P(k+1),\ Q(k+1)$ を証明

⇒　すべての自然数 n で命題 $P(n),\ Q(n)$ は成立する

関数列の漸化式

数列の漸化式に帰着させる。

関数方程式の考え方を用いる。

確率漸化式

確率推移図を用いる

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 数列の応用篇

標準問題

⑫14-標-1

次のように，正の奇数を順次に奇数個ずつの群に分ける．

$(1),\ (3,\ 5,\ 7),\ (9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17),\ \cdots$

(1) 第 n 群の 1 番目の数字を n で表せ．

(2) 2007 は第何群の何番目か．

⑫14-標-2

n を自然数とする．2 つの放物線 $y = x^2 + n^2$ と $y = 2x^2$ で囲まれる部分を S とし，S は周を含むとする．S に含まれる格子点の個数を求めよ．

ただし，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．

⑫14-標-3

条件 $1 < x < 2^{n+1}$ および $0 < y \leqq \log_2 x$ を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

⑫14-標-4

n を自然数とするとき

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

が成り立つことを証明せよ．

⑫**14-標-5**

n を自然数とするとき，$2^{n-1} > \frac{1}{2}(n^2 - n)$ が成り立つことを示せ．

⑫**14-標-6**

$$f_0(x) = 1,\ \ f_1(x) = x$$
$$f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) - f_n(x) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる関数の列 $\{f_n(x)\}$ がある．

(1) $f_n(x)$ は n 次の整式であることを証明せよ．

(2) θ は $0 < \theta < \pi$ を満たす定数とする．

$$f_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを証明せよ．

⑫**14-標-7**

さいころを n 回投げたとき 1 の目が偶数回出る確率を p_n とする．ただし，1 の目がまったく出なかった場合は偶数回出たと考えることにする．次の問いに答えよ．

(1) p_1 を求めよ．

(2) p_{n+1}，p_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) p_n（$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）を求めよ．

⑫**14-標-8**

正四面体 ABCD の頂点の上を毎秒 1 回ずつ動く粒子がある．ある頂点に来た粒子は，1 秒後には残りの 3 つの頂点のいずれかにそれぞれ等確率 $\frac{1}{3}$ で移動する．いま，A から出発した粒子の n 秒後の位置が A，B，C，D である確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．このとき，a_n，b_n，c_n，d_n を n で表せ．

発展問題

⑫**14-発-1**

$\{a_n\}, \{b_n\}$ は $a_n+b_n\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たす整数の数列とする。

(1)　すべての n について，$a_n-b_n\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　すべての n について，${a_n}^2-1$ が 3 の倍数であることを示せ。

(3)　$\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ は，ある正の整数 A に対して，$\sqrt{A}+\sqrt{A+1}$ の形をしていることを示せ。

⑫**14-発-2**

$$\begin{cases}\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta\\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1\end{cases},\quad \begin{cases}\sin 3\theta=\sin\theta\left(4\cos^2\theta-1\right)\\ \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{cases}$$

のように，$\sin n\theta, \cos n\theta$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ はそれぞれ適当な多項式 $P_n(x), Q_n(x)$ を用いて，

$$\begin{cases}\sin n\theta=\sin\theta\cdot P_n(\cos\theta)\\ \cos n\theta=Q_n(\cos\theta)\end{cases}$$

と表せることを証明せよ。

⑫**14-発-3**

　1 つの円に n 本の弦を，どの 2 本も円の内部で交わり，どの 3 本も 1 点で交わらないように引き，円の内部をいくつかの領域に分割する。このとき，多角形になる領域の個数と，多角形にならない領域の個数を求めよ。

⑫**14-発-4**

n 項($n \geqq 2$)からなる数列$\{a_n\}$は各項が 0 または 1 であって，連続するどの 3 項の中にも 0 も 1 も少なくとも 1 個は現れるとする。この数列のうち，最後の 2 つの数字が同じである数列の個数をx_n，最後の 2 つの数字が異なる数列の個数をy_nとする。

(1)　x_{n+1}とy_{n+1}をx_nとy_nで表せ。

(2)　$\{x_n + ry_n\}$が公比rの等比数列となるようなrの値を全て求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の個数$S_n = x_n + y_n$を求めよ。

⑫**14-発-5**

二辺の長さが 1 と 2 の長方形のタイルがある。縦 2，横nの長方形の部屋をこのタイルで過不足なく敷き詰めるときの並べ方の総数を求めよ。

⑫**14-発-6**

容器Aには 12%の食塩水 300g，容器 B には 6%の食塩水 300g が入れてある。A，B からそれぞれ 100g を取って A の分を B に，B の分を A に入れる。この操作をn回繰り返した結果，A はa_n%，B はb_n%の食塩水となったとする。a_nをnの式で表せ。

⑫**14-発-7**

整数からなる数列$\{a_n\}$を漸化式

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=3 \\ a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n \quad (n=1, 2, \cdots) \end{cases}$$

で定める。

(1) a_nが偶数となるnを決定せよ。

(2) a_nが 10 の倍数となるnを決定せよ。

⑫**14-発-8**

xの整式$f_n(x)\left(n=1, 2, 3, \cdots\cdots\right)$を$f_1(x)=3x^2$, $f_{n+1}(x)=x^2+x+\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$で定める。このとき，$f_n(x)$を求めよ。

⑫**14-発-9**

整式の列$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,……が，関係$f_1(x)=x^2+x-2$,
$x^2 f_{n+1}(x)=2x^3+x^4+\displaystyle\int_0^x t f_n(t)\,dt\left(n=1, 2, 3, \cdots\cdots\right)$で定義されている。

(1)　$f_n(x)$の次数を求めよ。

(2)　$f_n(x)$を求めよ。