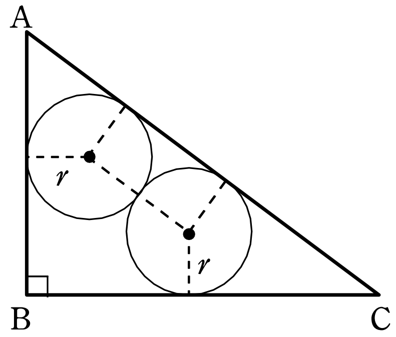
試験時間60分　　解答は解答用紙に書いて、提出してください

$\boxed{1}$ 連立方程式 $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+y+3z=3 \end{cases}$ を解け．

$\boxed{2}$ 不等式 $|x^2-2x-3| \geqq 2|x-2|$ を解け．

$\boxed{3}$ 直角三角形 ABC において，AB$=3$，AC$=5$，BC$=4$ である。
図のように，半径 r の 2 つの円が互いに外接し，一方の円は辺 AB，AC と，もう一方の円は辺 AC，BC と接している。このとき，r の値を求めよ。



$\boxed{4}$ (1)　関数 $f(x)=xe^{-2x}$ の極値と曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標を求めよ。
(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の変曲点における接線，曲線 $y=f(x)$ および直線 $x=3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ 座標平面において，動点 P の座標 $(x,\ y)$ が時刻 t の関数として

$$x=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}},\quad y=t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}\quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

で与えられている。

(1)　動点 P の x 座標が最大になるのは $t=$ ア$\boxed{}$ のときであり，y 座標が最大になるのは $t=$ イ$\boxed{}$ のときである。

(2)　$0<t<1$ のとき，動点 P の速さの最小値は ウ$\boxed{}$ である。

(3)　動点 P が直線 $y=x$ 上にくるのは $t=0$ のとき，$t=$ エ$\boxed{}$ のとき，$t=1$ のときの 3 回である。

(4)　t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，動点 P の描く曲線を L とする。L で囲まれる図形の面積は オ$\boxed{}$ である。

$\boxed{6}$ 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える．円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である．正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は 1 辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である．
$0<r \leqq \sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする．
(1)　高さが $z=t$ $(-r \leqq t \leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ．
(2)　K の体積 $V(r)$ を求めよ．
(3)　$0<r \leqq \sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{1}$ 解答　$x=-\dfrac{2}{7},\ y=\dfrac{5}{7},\ z=\dfrac{6}{7}$

$\boxed{2}$ 解答　$x \leqq -\sqrt{7},\ 2-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{7},\ 2+\sqrt{3} \leqq x$

$\boxed{3}$ 解答　$r=\dfrac{5}{7}$

$\boxed{4}$ 解答　(1)　$x=\dfrac{1}{2}$ で極大値 $\dfrac{1}{2e}$，変曲点 $\left(1,\ \dfrac{1}{e^2}\right)$　　(2)　$\dfrac{3e^4-7}{4e^6}$

$\boxed{5}$ 解答　（ア）$\dfrac{1}{4}$　（イ）$\dfrac{3}{4}$　（ウ）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　（エ）$\dfrac{1}{2}$　（オ）$\dfrac{1}{4}$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　$\dfrac{8\sqrt{r^2-t^2}}{r}-2(r^2-t^2)$　　(2)　$V(r)=4\pi r-\dfrac{8}{3}r^3$　　(3)　最大値 $\dfrac{4\pi\sqrt{2\pi}}{3}$

$\boxed{1}$ $\begin{cases} 2x+y+z=1 \cdots\cdots ① \\ x+2y+z=2 \cdots\cdots ② \\ x+y+3z=3 \cdots\cdots ③ \end{cases}$

①−② から $x-y=-1$ ……④

①×3−③ より $5x+2y=0$ ……⑤

④, ⑤ から $x=-\dfrac{2}{7},\ y=\dfrac{5}{7}$

① に代入して $-\dfrac{4}{7}+\dfrac{5}{7}+z=1$ より $z=\dfrac{6}{7}$

$\boxed{2}$ $|x^2-2x-3|\geqq 2|x-2|\geqq 0$ より両辺を平方しても同値である．

$(x^2-2x-3)^2\geqq 4(x-2)^2$

$(x^2-2x-3)^2-\{2(x-2)\}^2\geqq 0$

$(x^2-2x-3+2x-4)(x^2-2x-3-2x+4)\geqq 0$

$(x^2-7)(x^2-4x+1)\geqq 0$

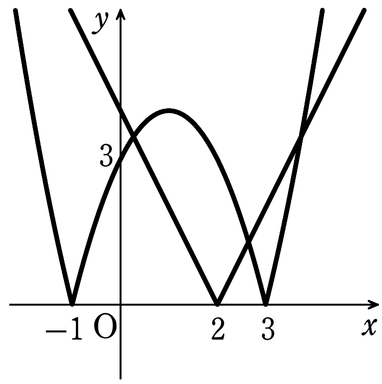
(左辺)$=0$ の解は $x=\pm\sqrt{7},\ 2\pm\sqrt{3}$

$-\sqrt{7}<2-\sqrt{3}<\sqrt{7}<2+\sqrt{3}$ なので，求める解は

$x\leqq-\sqrt{7},\ 2-\sqrt{3}\leqq x\leqq\sqrt{7},\ 2+\sqrt{3}\leqq x$ である．

別解　$y=|x^2-2x-3|=|(x+1)(x-3)|$ ……①

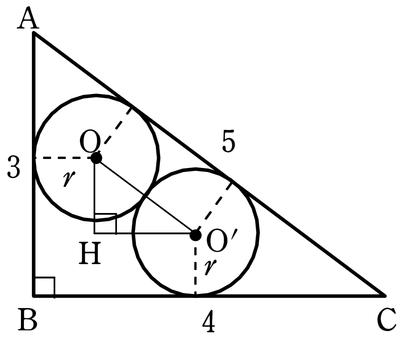
$y=2|x-2|$ ……② のグラフを考える．



$\boxed{3}$ 右の図のように，2 つの円の中心を O，O′ と定め，O，O′ からそれぞれ辺 BC，AB に引いた垂線の交点を H とする。

△OHO′ と △ABC は相似で，OO′$=2r$ であるから

$$\frac{\mathrm{OH}}{3}=\frac{\mathrm{O'H}}{4}=\frac{2r}{5}$$



よって　　$\mathrm{OH}=\dfrac{6}{5}r$，$\mathrm{O'H}=\dfrac{8}{5}r$

点 A から円 O に引いた接線の長さは　　$3-\dfrac{6}{5}r-r=3-\dfrac{11}{5}r$

点 C から円 O′ に引いた接線の長さは　　$4-\dfrac{8}{5}r-r=4-\dfrac{13}{5}r$

よって　　$\left(3-\dfrac{11}{5}r\right)+2r+\left(4-\dfrac{13}{5}r\right)=5$

これを解くと，$2-\dfrac{14}{5}r=0$ より　　$r=\dfrac{5}{7}$

$\boxed{4}$ (1)　$f'(x)=e^{-2x}+x\cdot(-2)e^{-2x}=(1-2x)e^{-2x}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{1}{2}$

また　$f''(x)=-2e^{-2x}+(1-2x)\cdot(-2)e^{-2x}=4(x-1)e^{-2x}$

$f''(x)=0$ とすると　　$x=1$

$f(x)$ の増減，グラフの凹凸は右のようになる。

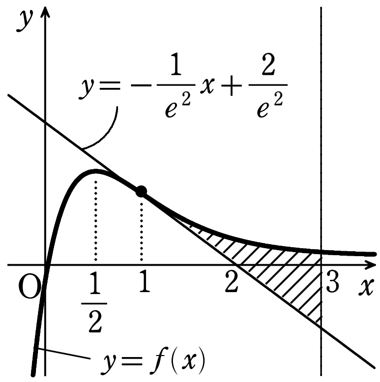
x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↘

よって，$f(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$ をとり，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標は $\left(1,\ \frac{1}{e^2}\right)$ である。

(2)　(1) から　　$f'(1)=-\frac{1}{e^2}$

よって，変曲点 $\left(1,\ \frac{1}{e^2}\right)$ における接線の方程式は　　$y-\frac{1}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-1)$

ゆえに　　$y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e^2}$



(1) から，求める面積 S は右の図の斜線部分の面積である。

よって

$$S=\int_1^3\left\{xe^{-2x}-\left(-\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e^2}\right)\right\}dx$$

$$=\int_1^3 xe^{-2x}dx+\int_1^3\left(\frac{1}{e^2}x-\frac{2}{e^2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_1^3+\int_1^3\frac{1}{2}e^{-2x}dx$$

$$+\left[\frac{1}{2e^2}x^2-\frac{2}{e^2}x\right]_1^3$$

$$=-\frac{3}{2e^6}+\frac{1}{2e^2}+\left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_1^3+0$$

$$=-\frac{3}{2e^6}+\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^6}+\frac{1}{4e^2}=\frac{3e^4-7}{4e^6}$$

$\boxed{5}$ (1)　$0<t<1$ に対して

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}+t^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{3}{4}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\cdot(-1)$$

$$=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}(1-4t)\quad\cdots\cdots①$$

$0<t<1$ において $\frac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=\frac{1}{4}$

$x=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}$ の増減表は右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	0	↗	極大	↘	0

よって，点 P の x 座標が最大となるのは $t=$ ア$\frac{1}{4}$ のときである。

$0<t<1$ に対して

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}+t^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{4}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\cdot(-1)$$

$$=\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}(3-4t)\quad\cdots\cdots②$$

$0<t<1$ において $\dfrac{dy}{dt}=0$ とすると　　$t=\dfrac{3}{4}$

$y=t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}$ の増減表は右のようになる。
ゆえに，点 P の y 座標が最大となるのは
$t=^{イ}\dfrac{3}{4}$ のときである。

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大	↘	0

(2)　①，② から，点 P の速さ $|\vec{v}|$ は

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{16}t^{-\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1-4t)^2+\frac{1}{16}t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(3-4t)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{t^{-\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{3}{2}}\{(1-t)(1-4t)^2+t(3-4t)^2\}}$$

$$=\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\{t(1-t)\}^{-\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}^{-\frac{3}{4}}$$

$0<t<1$ において　　$0<-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{1}{4}$

よって，$|\vec{v}|$ は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}=^{ウ}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

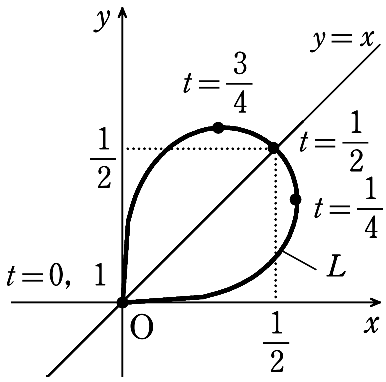
(3)　$y=x$ とすると　$t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}=t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}$

$0<t<1$ のとき，$t^{\frac{1}{4}}>0$，$(1-t)^{\frac{1}{4}}>0$ であるから

$t^{\frac{1}{2}}=(1-t)^{\frac{1}{2}}$　　よって　$t=1-t$

ゆえに　$t=^{エ}\dfrac{1}{2}$

(4)　(1)，(3) から，曲線 L は右の図のようになる。



よって，①，② から，求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}} xdy-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}} ydx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

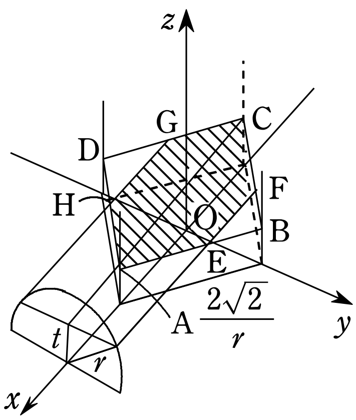
$$=\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{dy}{dt}dt+\int_1^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{4}}(1-t)^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{dx}{dt}dt-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(3-4t)dt+\frac{1}{4}\int_1^{\frac{1}{2}}(1-4t)dt-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}\Big[3t-2t^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\Big[t-2t^2\Big]_1^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}={}^{オ}\frac{1}{4}$$

$\boxed{6}$ (1)　(正方形の対角線)$-$(直径)$=\dfrac{4}{r}-2r=\dfrac{2(2-r^2)}{r}\geqq 0$

から，四角柱は円柱からはみだしているので，図において，求める面積を S とすると



$\mathrm{AE}=\mathrm{HE}\sin 45^\circ=\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2}$ から

$S=$(正方形 ABCD)$-2\triangle\mathrm{BEF}$

$$=\left(\frac{2\sqrt{2}}{r}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{r}-\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2}\right)^2$$

$$=\frac{8\sqrt{r^2-t^2}}{r}-2(r^2-t^2)$$

ただし　$-r\leqq t\leqq r$

(2)　$\dfrac{1}{2}V(r)=\displaystyle\int_0^r Sdt$

$$=\frac{8}{r}\int_0^r\sqrt{r^2-t^2}\,dt-2\int_0^r(r^2-t^2)dt$$

$$=\frac{8}{r}\cdot\frac{\pi r^2}{4}-2\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=2\pi r-\frac{4}{3}r^3$$

ゆえに　$V(r)=4\pi r-\dfrac{8}{3}r^3$

(3)　$V'(r)=4\pi-8r^2=-8\left(r^2-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$=-8\left(r+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)\left(r-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$$

$0<r\leqq\sqrt{2}$ から　$V'(r)=0$ のとき　$r=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$

よって，次の増減表を得る.

r	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		↗	極大	↘	

ゆえに，$r=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$ のとき　$V(r)$ は極大かつ最大となる．

$V\left(\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)=4\cdot\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\pi-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2\pi}{4}\right)=\dfrac{4\pi\sqrt{2\pi}}{3}$