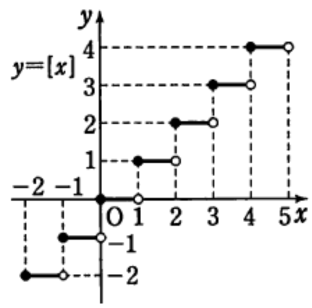
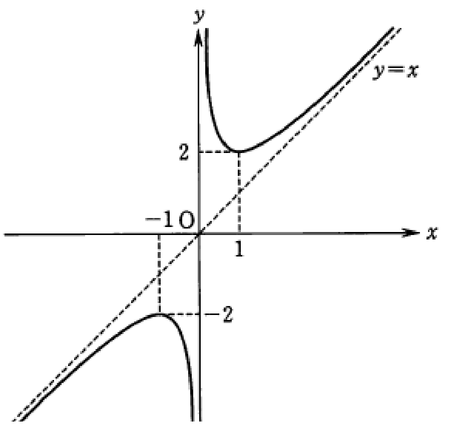
有名曲線 I

ガウス記号

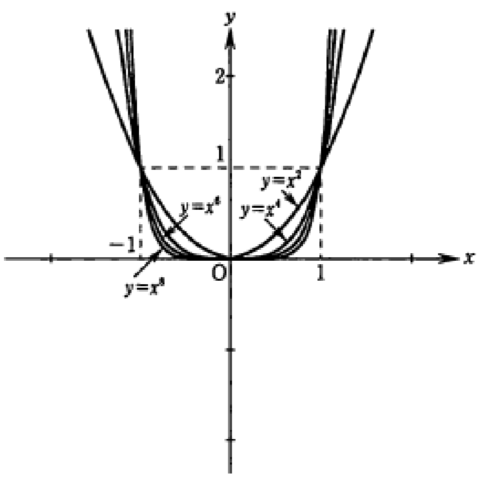


$$\boxed{y=x+\frac{1}{x}}$$



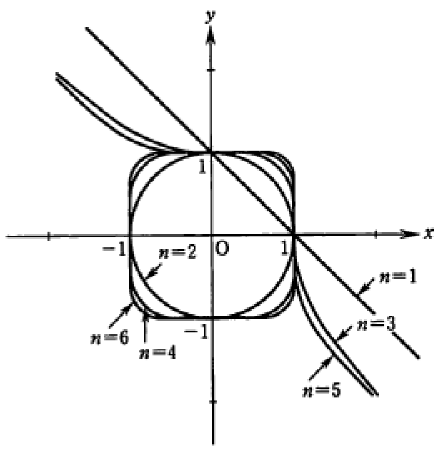
文字置き換えでしばしば登場する。
原点対称
極値は相加・相乗で求まる。

$$\boxed{y=x^n}$$



$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=0$　が直感的にわかる。
メルカトル級数・ライプニッツ級数の収束問題で使える。

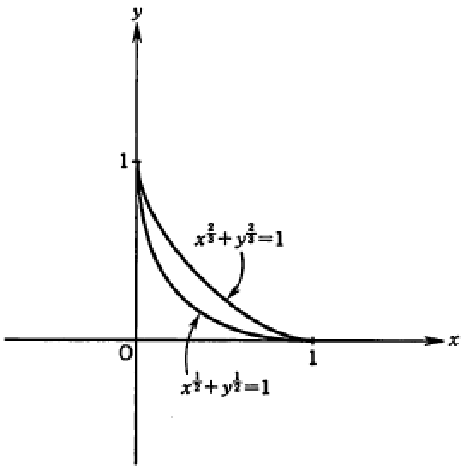
$x^n + y^n = 1$ （n は自然数）



最大最小問題などで知っておくと得をする問題が散見される。

【例題】　曲線 $x^4 + y^4 = 4$ に異なる 4 点で外接する円の方程式は $x^2 + y^2 = \boxed{\quad ① \quad}$ であり，第 1 象限における接点座標は $\boxed{\quad ② \quad}$ となる。（2001 久留米）

$x^n + y^n = 1$ （一般）



（1）$n = \dfrac{2}{3}$ のときはアステロイド

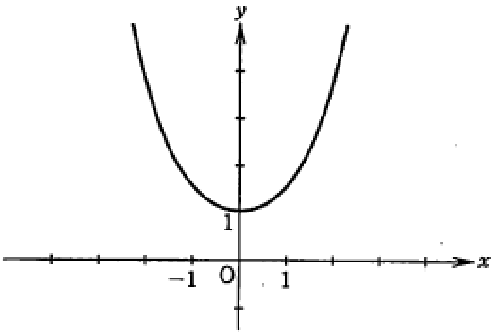
（2）$n = \dfrac{1}{2}$ のときは放物線の一部

45°回転して関数化して面積・体積へつなげる問題が想定される。

【例題 01】

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ (rad)回転した曲線の方程式を求めよ。(変域不要)

カテナリー



$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

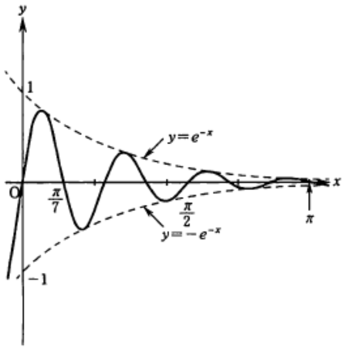
（性質）

① $y''=y$

② $\sqrt{1+(y')^2}=y$

性質②は弧長を求める問題で用いる

減衰曲線



$y=e^{-x}\sin 7x$

【例題 02】

関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ について，次の各問いに答えよ。

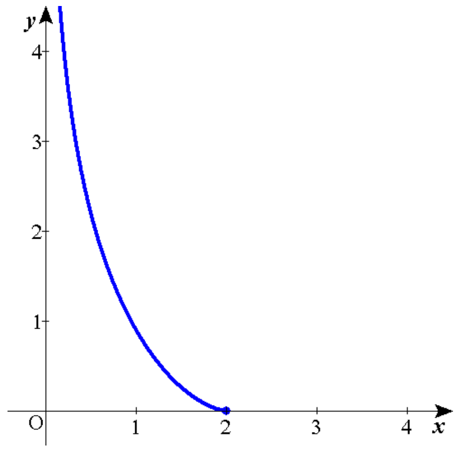
(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$0<x<5\pi$ における関数 $f(x)$ の極大値をすべて求めよ。

(3)　$(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ において曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_k を求めよ。

(4)　(3)で求めた体積 V_k から，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}V_k$ の値を求めよ。

牽引曲線（トラクトリックス）



$$y=a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2}$$

微分計算がメンドウ

$$y'=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

【例題 03】2011 聖マ

関数 $f(x)=2\log\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}-\sqrt{4-x^2}$ を考える。ただし，対数は自然対数である。

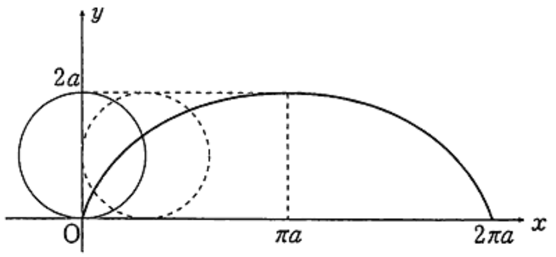
[1]　関数 $f(x)$ の定義域は $0<x\leqq a$ である。a の値を求めなさい。

[2]　曲線 $y=f(x)$ の概形をかきなさい。y の増減およびグラフの凹凸を調べた過程も記載しなさい。

[3]　$0<x_0<a$ とし，上問[2]の曲線 $y=f(x)$ を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(x_0\,,\ y_0)$ における C の接線と y 軸との交点を Q とする。線分 PQ の長さを求めなさい。ただし，a は上問[1]で求めた値とする。

有名曲線 II

サイクロイド



$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

山一つ分について

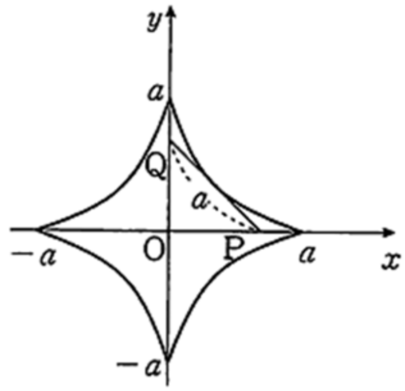
x 軸との間の面積　$3\pi a^2$

x 軸回転体体積　$5\pi a^3$

弧長　$8a$

【例題】弧長が $8a$ となることを確かめよ。

アステロイド



$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

一周分について

囲む面積　$\dfrac{3}{8}\pi a^2$

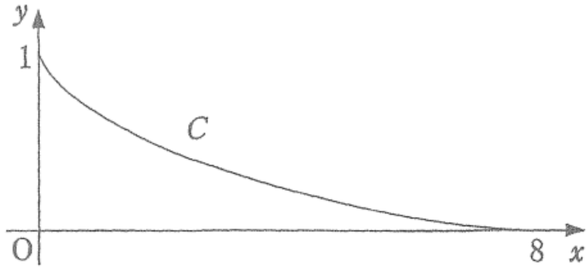
x 軸回転体体積　$\dfrac{32}{105}\pi a^3$

（１）長さ a の線分の両端がそれぞれ x 軸上，y 軸上を動くときの通過領域の境界線。

（２）４：１の内サイクロイド（比は台円と動円の半径の比）

【例題 04】東邦 2011

下図のような曲線 $x^{\frac{2}{3}}+4y^{\frac{2}{3}}=4\ (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ を C とする。以下の(1)〜(4)に答えよ。



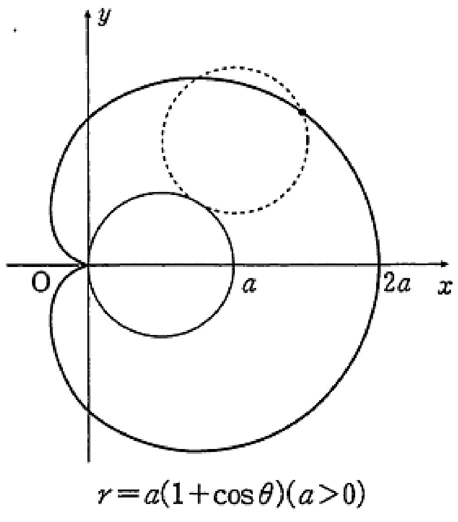
(1)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta d\theta\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。このとき，I_2 の値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$ である。また，I_6 と I_4 の間には，関係式 $I_6=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}I_4$ が成り立つ。

(2)　曲線 C および x 軸，y 軸に囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi$ である。

(3)　曲線 C の方程式について，y の導関数を $\dfrac{dy}{dx}$ とする。$x>0$，$y>0$ のとき，$\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}\dfrac{dy}{dx}$ は一定の値 $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。

(4)　曲線 C 上の点で，第 1 象限内にある点を P とする。また，点 P における接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A, B とする。原点を O で表したとき，三角形OAB の面積は点 A の x 座標が $\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。

カーディオイド



$$\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad r=a(1+\cos\theta)$

一周分について

囲む面積　$\dfrac{3}{2}\pi a^2$

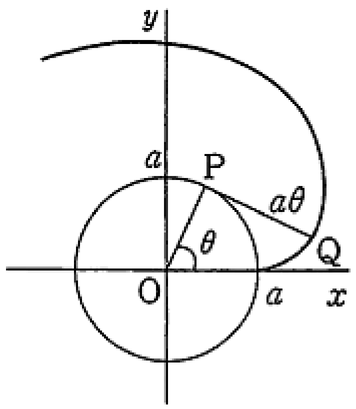
弧長　$8a$

（１）点 P が線分 OA を直径とする円上を動くとき，直線 OP 上で PQ＝OA を満たす点 Q の軌跡

（２）極座標面積公式の利用

（３）１：１外サイクロイド　（比は台円と動円の半径の比）

円の伸開線（インボリュート）



$$\begin{cases} x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta) \\ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta) \end{cases}$$

一周分について

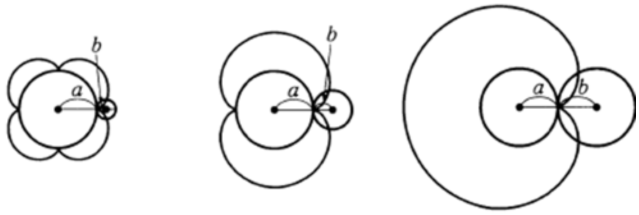
線分 PQ の通過する面積　$\dfrac{4}{3}a^2\pi^3$

弧長　$2a\pi^2$

（１）面積は，微小面積の利用，またはガウス・グリーンの定理の利用。

（２）弧長は比較的容易

外サイクロイド（エピサイクロイド）

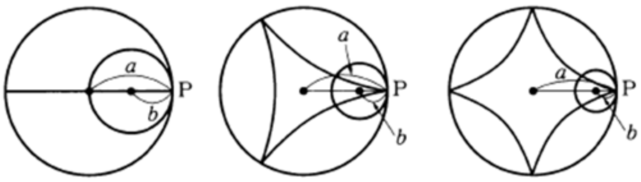


$a:b=4:1$　　$a:b=2:1$　　$a:b=1:1$

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\theta \\ y=(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\theta \end{cases}$$

（1）１：１はカーディオイド

内サイクロイド（ハイポサイクロイド）

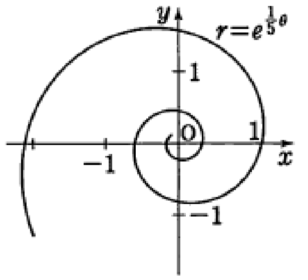


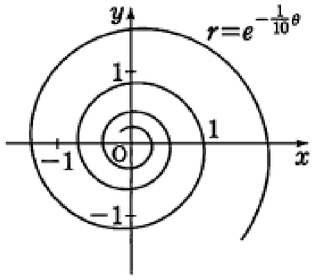
$a:b=2:1$　　$a:b=3:1$　　$a:b=4:1$

$$\begin{cases} x=(a-b)\cos\theta+b\cos\left(\dfrac{a-b}{b}\right)\theta \\ y=(a-b)\sin\theta-b\sin\left(\dfrac{a-b}{b}\right)\theta \end{cases}$$

（1）４：１はアステロイド，２：１は線分，３：１は東急電鉄のマーク

等角らせん



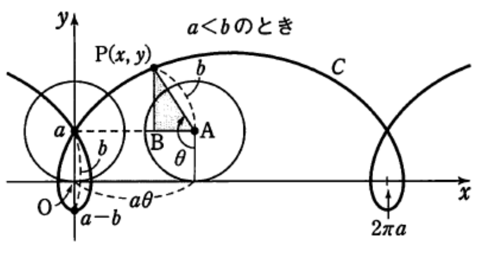


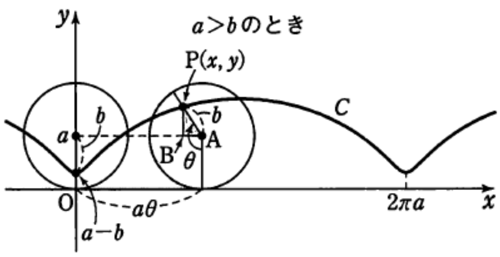
$$\begin{cases} x = Ke^{a\theta}\cos\theta \\ y = Ke^{a\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad r = Ka^{a\theta}$

（１）曲線上の点 P における接線と直線 OP のなす角が一定

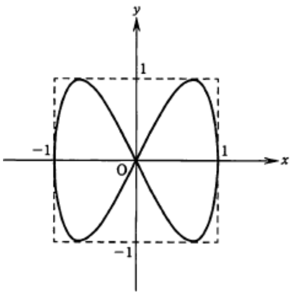
トロコイド



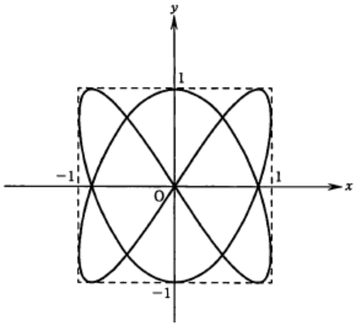


リサージュ曲線

$$\begin{cases} x = \sin m\theta \\ y = \sin n\theta \end{cases}$$



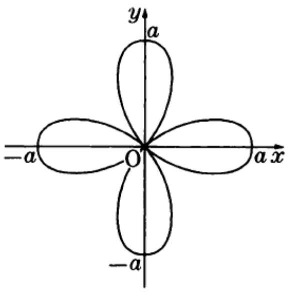
$m=1,\ n=2$



$m=2,\ n=3$

正葉曲線

$$r = a\cos n\theta$$



$r = a\cos 2\theta$

【例題 05】

極座標で表現された図形 $r = f(\theta)$ と原点から始まる二つの半直線 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$ で囲まれる部分の面積は $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 d\theta$ で表すことができる。たとえば，$r = 4\cos\theta$ で表される図形の面積は $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^2\theta d\theta = \boxed{\text{ア}}\pi$ となる。

正葉形 $r = \sin 3\theta$ において $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ で $r \geqq 0$ となる θ の範囲を順に示すと $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi$，$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi \leqq \theta \leqq \pi$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ である。この正葉形で囲まれる面積は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ となる。

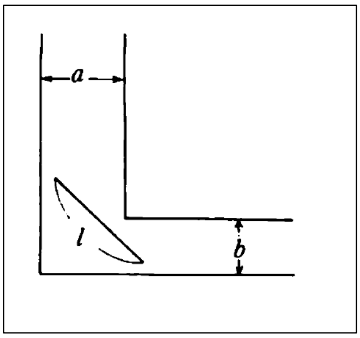
（2011 順天堂大学）

【例題 06】

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分を，直線 $y=x$ のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。（電通大）

【例題 07】

図のように直角に曲がった廊下がある。長さlの棒を水平にもったままかどをまわりたい。このことが可能な棒の長さlの最大値を求めよ。ただし，廊下は十分に長いものとする。(東京電機大)



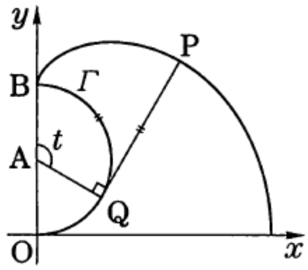
【例題 08】（カージオイド）

O-xy 平面上の点 A$(-1,\ 0)$ を中心とする半径１の円 C 上の点Ｐにおける接線へ，原点Oから下ろした垂線の足をＱとする．点Ｐが，Ｏを出発点とし，C 上を角速度１ラジアン/秒で反時計回りに回転するとき，

(1)　t 秒後のＱの位置 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ．

(2)　Ｐが C 上を１周するとき，Ｑの描く曲線の概形をかき，この曲線が囲む図形の面積を求めよ．

【例題 09】円のインボリュート



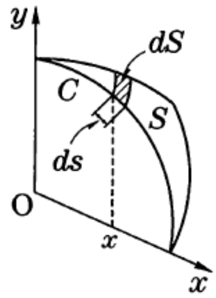
原点をOとし，平面上の2点A(0, 1)，B(0, 2)をとる．OBを直径とし点(1, 1)を通る半円をΓとする．長さπの糸が一端をOに固定して，Γに巻きつけてある．この糸の他端Pを引き，それがx軸に到達するまで，ゆるむことなくほどいてゆく．糸と半円との接点をQとし，∠BAQの大きさをtとする．

(1)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$t$を用いて表せ．

(2)　Pが描く曲線と，x軸およびy軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

【例題 10】$\boxed{\text{難}}$　曲面の面積

曲線 $y=1-x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を C とする．C を y 軸のまわりに１回転したとき C が通過する曲面を S とする．C の微小部分（長さ ds）が通過する S の微小部分 dS の面積は $2\pi x ds$ であるとして，S の面積を計算せよ．（宇都宮大）



MEMO