試験時間60分　　【解答解説】

1　＊　n を $0 \leqq n \leqq 18$ である整数として，次の n の式 $f(n)$ を考える。

$$f(n)=|n-1|+|n-2|+|n-3|+\cdots\cdots+|n-18|$$

このとき，次のことがいえる。　(1)　$f(0)=$ ア$\boxed{\quad}$ である。

(2)　$f(n)$ の値が最小となる n の値は $n=$ ク$\boxed{\quad}$ と $n=$ ケ$\boxed{\quad}$ であり，そのとき，

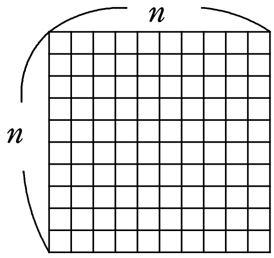
$f(n)=$ コ$\boxed{\quad}$ である。

2　和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2$ を求めよ．

3　1 辺の長さが n の正方形の各辺を n 等分して図のような網目状の図形を考える．

(1)この図形に含まれる線分を辺とする正方形の個数を求めよ．

(2)この図形に含まれる線分を辺とする長方形であって正方形ではないものの個数を求めよ．



4　次のように，正の奇数を順に上から下へ，左から右に奇数個ずつ並べる．

1

3，　5，　7

9，11，13，15，17

19，21，23，25，27，29，31

……………………………………

上から下へ 1 行，2 行，……，左から右へ 1 列，2 列，…… と数える．

(1)　第 n 行目の第 1 列目の数を n の式で示せ．

(2)　第 n 行目にあるすべての数の総和を求めよ．

(3)　奇数 555 はそれぞれ何行何列にあるか．

5　n を自然数とする．集合 A, B が $\mathrm{A}=\{(x,\ y)|x,\ y$ はともに整数，かつ $|x|+|y| \leqq n\}$
$\mathrm{B}=\{(x,\ y)|x,\ y$ はともに整数，かつ $|2x|+|y| \leqq 8n\}$ により与えられているとき，次の集合の要素の個数を求めよ．　(1)　A　(2)　$\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$

6　次のように円 C_n を定める．まず，C_0 は $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円，C_1 は $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円とする．次に C_0，C_1 に外接し x 軸に接する円を C_2 とする．更に，$n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots$ に対し，順に，C_0，C_{n-1} に外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする．C_n $(n \geqq 1)$ の中心の座標を $(a_n,\ b_n)$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，2 つの円が外接するとは，中心間の距離がそれぞれの円の半径の和に等しいことをいう．　このとき，a_n を求めよ．

7　2つの箱A，Bのそれぞれに赤玉が1個，白玉が3個，合計4個ずつ入っている．1回の試行で箱Aの玉1個と箱Bの玉1個を無作為に選び交換する．この試行を n 回繰り返した後，箱Aに赤玉が1個，白玉が3個入っている確率 p_n を求めよ．

8　数列 a_1，a_2，a_3，…… を次のように定める。

(A)　$a_1=1$ とする。

(B)　$a_n \geqq \frac{5}{4}(n+1)$ であれば，$a_{n+1}=a_n-1$ とする。

(C)　$a_n < \frac{5}{4}(n+1)$ であれば，$a_{n+1}=a_n+2$ とする。

(1)　a_6 を求めよ。

(2)　a_{4m-1} $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を m の式で表せ。

1　解答　(ア)　171　　(ク)，(ケ)　9，10　　(コ)　81

2　解答　$-n(2n+1)$

3　解答　(1)　$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2)　$\frac{1}{12}n(n-1)(n+1)(3n+2)$

4　解答　(1)　$2n^2-4n+3$

(2)　$4n^3-6n^2+4n-1$

(3)　555は17行22列

5　解答　(1)　$2n^2+2n+1$

(2)　$62n^2+6n$

6　解答　$a_n=\frac{1}{n}$

7　解答　$p_n=\frac{3}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\frac{4}{7}$

8　解答　(1)　$a_6=8$　　(2)　$a_{4m-1}=5m$

$\boxed{1}$ (1) $f(0)=1+2+3+\cdots\cdots+18=\dfrac{1}{2}\cdot18\cdot19=$ ア171

(2) $f(1)-f(0)=(0+1+2+\cdots\cdots+17)$

$-(1+2+\cdots\cdots+17+18)$

$=0-$ イ$18<0$

$f(2)-f(1)=(1+0+1+2+\cdots\cdots+16)$

$-(0+1+2+\cdots\cdots+16+17)$

$=1-$ ウ$17<0$

$f(3)-f(2)=(2+1+0+1+2+\cdots\cdots+15)$

$-(1+0+1+2+\cdots\cdots+15+16)$

$=2-$ エ$16<0$

$\vdots$

$f(9)-f(8)=8-10<0$

$f(10)-f(9)=9-$ オ$9=0$

$f(11)-f(10)=10-$ カ$8>0$

$\vdots$

$f(18)-f(17)=17-$ キ$1>0$

$f(0)>f(1)>\cdots\cdots>f(9)=f(10)<f(11)<\cdots\cdots<f(18)$

よって，$f(n)$ は $n=$ ク9，ケ10 のとき最小となる。(ク10，ケ9 でもよい)

最小値は　$f(9)=8+7+\cdots\cdots+2+1+0+1+2+\cdots\cdots+9$

$=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot9+\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot10=$ コ81

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$

$=-\{1+2+3+4+\cdots\cdots+(2n-1)+2n\}$

$=-\dfrac{2n(2n+1)}{2}=-n(2n+1)$

$\boxed{\text{参考}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}k^2=\sum_{i=1}^{n}\{(-1)^{2i-2}(2i-1)^2+(-1)^{2i-1}(2i)^2\}=\sum_{i=1}^{n}(-4i+1)$

3 (1)　面積が 1^2 である正方形は，長さ n のたての $n+1$ 本の線分の中の隣り合う 2 本と，長さ n の横の $n+1$ 本の線分の中の隣り合う 2 本とで囲まれる図形であるから，その個数は n^2 個である．面積が 2^2 である正方形は同様にして $(n-1)^2$ 個ある．
以下同様にして，求める正方形の個数は

$$n^2+(n-1)^2+\cdots\cdots+2^2+1^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　この図形に含まれる長方形全部の個数は ${}_{n+1}\mathrm{C}_2\times{}_{n+1}\mathrm{C}_2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ から，
求める個数は，(1) を利用して

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{n(n+1)}{12}\{3n(n+1)-2(2n+1)\}$$
$$=\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}$$

4 第 n 行目の第 1 列目の数を a_n とする．

(1)　$a_1=1$

$n\geqq 2$ のとき　第 $n-1$ 行までの正の奇数の個数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=(n-1)^2$ (個)

よって，a_n は $(n-1)^2+1$ 番目の正の奇数である．

ゆえに　　$a_n=2\{(n-1)^2+1\}-1=2n^2-4n+3$ …… ①

① で $n=1$ とすると $a_1=1$ となり，① は $n=1$ のときも成り立つ．

ゆえに　$a_n=2n^2-4n+3$

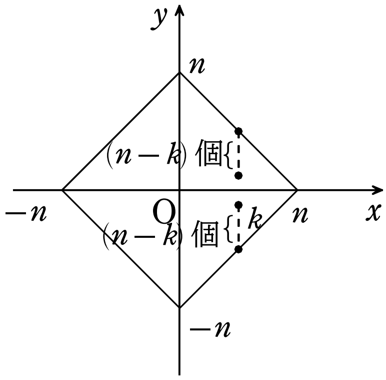
(2)　第 n 行の数が作る数列は初項 a_n，公差 2，項数 $2n-1$ の等差数列である．
末項は n^2 番目の正の奇数であるから　$2n^2-1$
よって，求める総和を S_n とすると

$$S_n=\frac{(2n-1)\{(2n^2-4n+3)+(2n^2-1)\}}{2}$$
$$=(2n-1)(2n^2-2n+1)$$
$$=4n^3-6n^2+4n-1$$

(3)　また，$555=2k-1$ から　$k=278$
よって，555 は 278 番目の正の奇数である．
$16^2=256$，$17^2=289$，$278-256=22$ から，555 は 17 行 22 列にある．

5 (1)　$1 \leqq k \leqq n$ に対し，(k, y) が A の要素であるような y の個数は $2(n-k)+1$
したがって，A の要素の個数は

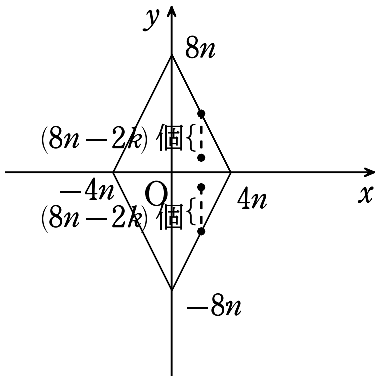
$$2\sum_{k=1}^{n}\{2(n-k)+1\}+2n+1=2n^2+2n+1$$



(2)　(1) と同様に，$1 \leqq k \leqq 4n$ に対し (k, y) が B の要素であるような y の個数は $2(8n-2k)+1$
したがって，B の要素の個数は

$$2\sum_{k=1}^{4n}\{2(8n-2k)+1\}+16n+1=64n^2+8n+1$$

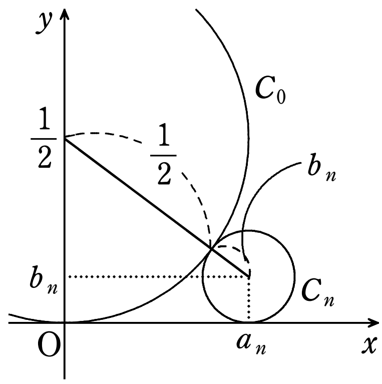
ところが，集合 A は集合 B に含まれるから
$(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$ の要素の個数$)=($B の要素の個数$)$
$-($A の要素の個数$)=62n^2+6n$



6　C_n は，中心が $(a_n,\ b_n)$ であるから，半径は b_n である．
よって，右図から

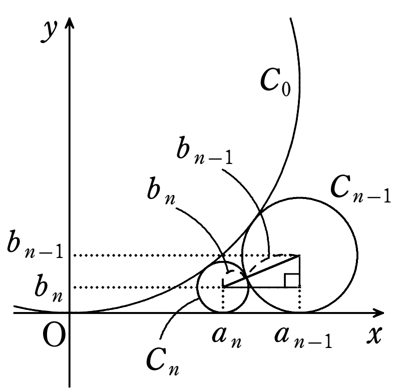
$$a_n{}^2+\left(\frac{1}{2}-b_n\right)^2=\left(\frac{1}{2}+b_n\right)^2$$

ゆえに　$b_n=\dfrac{a_n{}^2}{2}$



右図から　$(b_n+b_{n-1})^2=(b_{n-1}-b_n)^2+(a_{n-1}-a_n)^2$
ゆえに　$(a_{n-1}-a_n)^2=4b_nb_{n-1}$
よって，(1) から　$(a_{n-1}-a_n)^2=a_n{}^2a_{n-1}{}^2$
$0<a_n<a_{n-1}$ であるから　$a_{n-1}-a_n=a_na_{n-1}$
ゆえに　$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=1$
$a_1=1$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=n$$



ゆえに　$a_n=\dfrac{1}{n}$　　これは $n=1$ のときも成り立つ．　したがって　$a_n=\dfrac{1}{n}$

7 試行を繰り返したとき起こり得る場合は，次の [1]，[2]，[3] のいずれかである．

[1]　箱 A に赤玉が 0 個，白玉が 4 個入っている．

[2]　箱 A に赤玉が 1 個，白玉が 3 個入っている．

[3]　箱 A に赤玉が 2 個，白玉が 2 個入っている．

n 回の試行後 [1] または [3] のとき，$n+1$ 回の試行後が [2] であるのは，赤玉が 2 個入っている箱から赤玉を選び交換する場合である．ゆえに，その確率は　$\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

n 回の試行後 [2] のとき，$n+1$ 回の試行後が [2] であるのは，A，B の箱から同じ色の玉を選び交換する場合である．ゆえに，その確率は　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{5}{8}$

よって　$p_{n+1}=(1-p_n)\cdot\dfrac{1}{2}+p_n\cdot\dfrac{5}{8}$　　整理して　$p_{n+1}=\dfrac{1}{8}p_n+\dfrac{1}{2}$

変形して　$p_{n+1}-\dfrac{4}{7}=\dfrac{1}{8}\left(p_n-\dfrac{4}{7}\right)$

$p_0=1$ から　$p_n-\dfrac{4}{7}=\left(1-\dfrac{4}{7}\right)\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$　　したがって　$p_n=\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n+\dfrac{4}{7}$

8 (1)　$a_1=1$ であるから，　$a_1<\dfrac{5}{4}(1+1)=\dfrac{5}{2}$ より　$a_2=a_1+2=1+2=3$

$a_2<\dfrac{5}{4}(2+1)=\dfrac{15}{4}$ より　$a_3=a_2+2=3+2=5$

$a_3=\dfrac{5}{4}(3+1)=5$ より　$a_4=a_3-1=5-1=4$

$a_4<\dfrac{5}{4}(4+1)=\dfrac{25}{4}$ より　$a_5=a_4+2=4+2=6$

$a_5<\dfrac{5}{4}(5+1)=\dfrac{15}{2}$ より　$a_6=a_5+2=6+2=8$

(2)　$a_{4m-1}=5m$　……①　であることを数学的帰納法で証明する。

[1]　$m=1$ のとき　(1) から　$a_{4\cdot1-1}=a_3=5=5\cdot1$

よって，① は成り立つ。

[2]　$m=k$ のとき，① が成り立つと仮定する。つまり　$a_{4k-1}=5k$　とする。

$\dfrac{5}{4}\{(4k-1)+1\}=5k$ から

$a_{4k}=a_{4k-1}-1=5k-1$

$\dfrac{5}{4}(4k+1)=5k+\dfrac{5}{4}>5k-1$ から

$a_{4k+1}=a_{4k}+2=5k-1+2=5k+1$

$\dfrac{5}{4}\{(4k+1)+1\}=5k+\dfrac{5}{2}>5k+1$ から

$a_{4k+2}=a_{4k+1}+2=5k+1+2=5k+3$

$\dfrac{5}{4}\{(4k+2)+1\}=5k+\dfrac{15}{4}>5k+3$ から

$a_{4k+3}=a_{4k+2}+2=5k+3+2=5k+5$

よって，$a_{4(k+1)-1}=5(k+1)$ となるから，$m=k+1$ のときにも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 m について ① は成り立つ。