試験時間60分　　【解答解説】

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ を初項 7，公差 4 の等差数列とする。$\{a_n\}$ の初項から第 30 項までの和を求めよ。また，初項から第 50 項までのうちで，a_n の値が 3 の倍数であるものの和を求めよ。

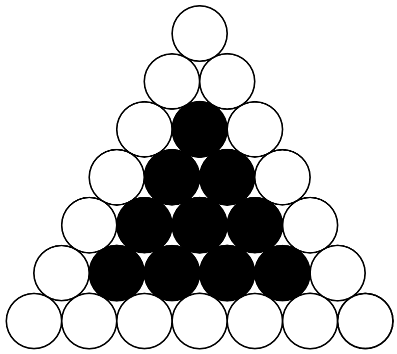
$\boxed{2}$ 公比が実数である等比数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ において，

$$a_6+a_7+a_8=3,\quad a_9+a_{10}+a_{11}=-\frac{3}{8}$$

が成り立つ。このとき，$a_{10}=$ ア $\boxed{\quad}$ であり，$\sum_{k=1}^{9} a_k a_{18-k}=$ イ $\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{3}$ $S(a)=a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots+100a^{100}$ とおくとき，$S(a)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 図のように，白丸を三角形の形状に並べ，三角形の内側の丸を黒く塗る．三角形の 1 辺に並べた白丸の個数が 30 のとき，黒丸の個数は $\boxed{\quad}$ である．



$\boxed{5}$ n を自然数とする。次の和を求め，因数分解した形で書くと

$$2\cdot(2n-1)+4\cdot(2n-3)+6\cdot(2n-5)+\ \cdots\cdots\ +2n\cdot 1=\boxed{\quad}$$ である。

$\boxed{6}$ 連続する m 個の奇数 $1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 2m-1$ の中から，異なる 2 つの数をとって積を作る．こうして得られる ${}_m\mathrm{C}_2$ 通りの積すべての総和を求めよ．

$\boxed{7}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

この数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ ア $\boxed{\quad}$ である。また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は イ $\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{8}$ 数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする。

$$a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　定数 c に対して $b_n=a_n+c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える。

$$b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たす c の値を求めよ。

(2)　a_n を n の式で表せ。

$\boxed{9}$ (1)　k を正の整数とする。k のどのような値に対しても $(k+1)^4k^4-k^4(k-1)^4=ak^7+bk^5$ が成り立つような定数 a，b を求めよ。

(2)　和 $\sum_{k=1}^{n}(k^7+k^5)$ を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　初項から第 30 項までの和 1950，a_n の値が 3 の倍数であるものの和 1680

$\boxed{2}$ 解答　(ア) $\dfrac{1}{4}$　(イ) $\dfrac{9}{4}$

$\boxed{3}$ 解答　$a=1$ のとき，$S(1)=5050$

$a \fallingdotseq 1$ のとき，$S(a)=\dfrac{a-101a^{101}+100a^{102}}{(1-a)^2}$

$\boxed{4}$ 解答　378

$\boxed{5}$ 解答　$\dfrac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$

$\boxed{6}$ 解答　$\dfrac{1}{6}m(3m^3-4m^2+1)$

$\boxed{7}$ 解答　(ア)　$2\cdot 3^{n-1}-1$　(イ)　3^n-n-1

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$c=-\dfrac{1}{2}$　(2)　$a_n=\dfrac{3^n-2^n+1}{2}$

$\boxed{9}$ 解答　(1)$a=8$，$b=8$　(2)　$\dfrac{1}{8}(n+1)^4n^4$

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ は初項 7，公差 4 の等差数列であるから

$$a_n=7+4(n-1)=4n+3$$

$\{a_n\}$ の初項から第 30 項までの和は　$\dfrac{30(a_1+a_{30})}{2}=\dfrac{30(7+123)}{2}=1950$

$a_n=3(n+1)+n$ と変形できるから，a_n の値が 3 の倍数であるためには，n が 3 の倍数であればよい。

$n=3m$ とすると　$a_{3m}=4\cdot 3m+3=12m+3$

よって，$\{a_{3m}\}$ は等差数列であるから，求める和は

$$a_3+a_6+\cdots\cdots+a_{48}=\frac{16(a_3+a_{48})}{2}=\frac{16(15+195)}{2}=1680$$

$\boxed{2}$ 等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とする。

条件から $\begin{cases} ar^5+ar^6+ar^7=3 \\ ar^8+ar^9+ar^{10}=-\dfrac{3}{8} \end{cases}$　すなわち $\begin{cases} ar^5(1+r+r^2)=3 & \cdots\cdots① \\ ar^8(1+r+r^2)=-\dfrac{3}{8} & \cdots\cdots② \end{cases}$

②÷① から　$r^3=-\dfrac{1}{8}$　　公比 r は実数であるから　$r=-\dfrac{1}{2}$

よって，$1+r+r^2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ であるから，② より

$$ar^8=\left(-\frac{3}{8}\right)\div\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

したがって　$a_{10}=ar^9=ar^8\cdot r=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)={}^{ア}\dfrac{1}{4}$

$$\sum_{k=1}^{9}a_ka_{18-k}=a_1a_{17}+a_2a_{16}+a_3a_{15}+\cdots\cdots+a_9a_9$$

$$=a\cdot ar^{16}+ar\cdot ar^{15}+ar^2\cdot ar^{14}+\cdots\cdots+ar^8\cdot ar^8$$

$$=9(ar^8)^2=9\left(-\frac{1}{2}\right)^2={}^{イ}\frac{9}{4}$$

$\boxed{3}$ (ｉ)　$a=1$ のとき，$S(1)=1+2+3+4+\cdots\cdots+100=\displaystyle\sum_{k=1}^{100}k=\frac{1}{2}\times100\times101=5050$

(ii)

$$S(a)=a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots+100a^{100}$$

$$aS(a)=\qquad a^2+2a^3+3a^4+\cdots\cdots+99a^{100}+100a^{101}$$

辺々引くと　$(1-a)S(a)=a+a^2+a^3+a^4+\cdots\cdots+a^{100}-100a^{101}$

$a\neq1$ であるから

$$(1-a)S(a)=\frac{a(1-a^{100})}{1-a}-100a^{101}=\frac{a-a^{101}-100a^{101}+100a^{102}}{1-a}$$

よって　$S(a)=\dfrac{a-101a^{101}+100a^{102}}{(1-a)^2}$

$\boxed{4}$ 黒丸が並んでできる三角形において，その 1 辺に並んだ黒丸の個数は 27 である．

ゆえに，求める黒丸の個数は　$1+2+\cdots\cdots+27=\dfrac{27\cdot28}{2}=378$

$\boxed{5}$ $2\cdot(2n-1)+4\cdot(2n-3)+6\cdot(2n-5)+\cdots\cdots+2n\cdot 1$

$=\sum_{k=1}^{n}2k\{2n-(2k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}\{-4k^2+2(2n+1)k\}=-4\sum_{k=1}^{n}k^2+2(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k$

$=-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2(2n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$

$\boxed{6}$ 求める総和を S_m とすると

$\{1+3+5+\cdots\cdots+(2m-1)\}^2=1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2m-1)^2+2S_m$

ゆえに　$\left\{\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\right\}^2=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)^2+2S_m$ ……①

ここで　$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=m^2$,

$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)^2=4\sum_{k=1}^{m}k^2-4\sum_{k=1}^{m}k+\sum_{k=1}^{m}1$

$=4\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)-4\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+m$

$=\frac{1}{3}m(4m^2-1)$

よって，① から

$(m^2)^2=\frac{1}{3}m(4m^2-1)+2S_m$

ゆえに　$S_m=\frac{1}{6}m(3m^3-4m^2+1)$

$\boxed{7}$ $a_{n+1}=3a_n+2$ を変形すると　$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=1+1=2$，公比 3 の等比数列で

$a_n+1=2\cdot 3^{n-1}$

したがって　$a_n={}^{ア}2\cdot 3^{n-1}-1$

また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和は

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2\cdot 3^{k-1}-1)=2\cdot\frac{3^n-1}{3-1}-n={}^{イ}3^n-n-1$

$\boxed{8}$ (1)　$b_n=a_n+c$ から　$a_n=b_n-c$

$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=1$ より　$(b_{n+2}-c)-5(b_{n+1}-c)+6(b_n-c)=1$

よって　$b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=2c+1$

ゆえに　$2c+1=0$　　したがって　$c=-\frac{1}{2}$

(2)　$b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0$ を次の 2 通りに変形すると

$b_{n+2}-2b_{n+1}=3(b_{n+1}-2b_n)$ ……①

$b_{n+2}-3b_{n+1}=2(b_{n+1}-3b_n)$ ……②

① より　$b_{n+1}-2b_n=(b_2-2b_1)\cdot 3^{n-1}$

② より　$b_{n+1}-3b_n=(b_2-3b_1)\cdot 2^{n-1}$

(1) より $b_n = a_n - \dfrac{1}{2}$ であるから

$$b_1 = a_1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = a_2 - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

したがって

$$b_{n+1} - 2b_n = \frac{3}{2}\cdot 3^{n-1} = \frac{3^n}{2}$$

$$b_{n+1} - 3b_n = 1\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

これらの辺々を引くと　　$b_n = \dfrac{3^n - 2^n}{2}$

$a_n = b_n + \dfrac{1}{2}$ であるから　　$a_n = \dfrac{3^n - 2^n + 1}{2}$

$\boxed{9}$ (1)　$(k+1)^4 k^4 - k^4(k-1)^4 = (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)k^4 - k^4(k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k + 1)$

$$= k^4(8k^3 + 8k) = 8k^7 + 8k^5$$

よって，求める条件は，$8k^7 + 8k^5 = ak^7 + bk^5$ がすべての正の整数 k について成り立つことである。

したがって　　$a = 8$，$b = 8$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^7 + k^5) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}(8k^7 + 8k^5) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4 k^4 - k^4(k-1)^4\}$

ここで　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^4 k^4 - k^4(k-1)^4\}$

$$= \{(1+1)^4\cdot 1^4 - 1^4\cdot(1-1)^4\} + \{(2+1)^4\cdot 2^4 - 2^4\cdot(2-1)^4\}$$
$$+ \{(3+1)^4\cdot 3^4 - 3^4\cdot(3-1)^4\} + \cdots\cdots + \{(n+1)^4 n^4 - n^4(n-1)^4\}$$

$$= (\cancel{2^4\cdot 1^4} - 0) + (\cancel{3^4\cdot 2^4} - \cancel{2^4\cdot 1^4}) + (\cancel{4^4\cdot 3^4} - \cancel{3^4\cdot 2^4})$$
$$+ \cdots\cdots + \{(n+1)^4 n^4 - \cancel{n^4(n-1)^4}\}$$

$$= (n+1)^4 n^4$$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^7 + k^5) = \frac{1}{8}(n+1)^4 n^4$