試験時間70分　　解答解説

$\boxed{1}$ 1辺の長さが2の正四面体OABCにおいて，辺OA上に点Pをとり，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=1$ とする。更に，辺PB上の点Qを，PBとCQが垂直になるようにとる。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。　　(2)　PB：PQを求めよ。

$\boxed{2}$ 点 $(1,\ -2,\ 0)$ を通り $\vec{a}=(2,\ 0,\ 1)$ に平行な直線を ℓ，点 $(3,\ 12,\ -4)$ を通り $\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を m とする。点Pは ℓ 上，点Qは m 上を動くとき，線分PQの長さの最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 点A $(1,\ 2,\ 4)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(-3,\ 1,\ 2)$ に垂直な平面を α とする。平面 α に関して同じ側に2点P $(-2,\ 1,\ 7)$，Q $(1,\ 3,\ 7)$ がある。

(1)　平面 α に関して点Pと対称な点Rの座標を求めよ。

(2)　平面 α 上の点で，PS＋QSを最小にする点Sの座標とそのときの最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ 3点A $(2,\ 0,\ 0)$，B $(0,\ 2,\ 0)$，C $(0,\ 0,\ 3)$ が定める平面に原点Oから垂線OHを下ろす。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=^{ア}\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+^{イ}\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+^{ウ}\boxed{}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。

$\boxed{5}$ 座標空間において，3点A $(1,\ -1,\ 2)$，B $(2,\ 3,\ 3)$，E $(3,\ 3,\ 2)$ を通る平面上に点C, Dがある。四角形ABCDが正方形になるときの点C，Dの座標を求めよ。ただし，点C, Dの z 座標は正とする。

$\boxed{6}$ 座標空間内に点P $(5,\ 4,\ 2)$ を中心とする半径7の球面 S がある．原点Oからベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ -2)$ の向きに出た光線が球面 S 上の点Qで反射され，球面 S 上の点Rに達した．点Qでの反射により，点Rは直線OQと直線PQで作られる平面上にあり，直線PQは∠OQRを2等分することになる．

(1)　球面 S の座標による方程式を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分を求めよ．

(3)　原点Oから直線PQに垂線ONを下ろしたとき，$\overrightarrow{\mathrm{QN}}$ の成分を求めよ．

(4)　直線QR上の点Mから直線PQに下ろした垂線と直線PQとの交点が，Nと一致するとき，$\overrightarrow{\mathrm{QM}}$ の成分を求めよ．

(5)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の成分を求めよ．

$\boxed{7}$ ＊平面の問題

xy 平面で，動点Pは集合 $M=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqq 1\}$ を，動点Qは集合 $N=\{(x,\ y)\mid |x|+|y|=3\}$ を動くとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で表される点Rが動いてできる図形を図示し，その面積を求めよ。　ただし，Oは原点とする。

$\boxed{8}$ ＊　$3\sin x+\cos x=c$ が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で異なる2つの解をもつような c の値の範囲を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(2)　13：5

$\boxed{2}$ 解答　$4\sqrt{6}$

$\boxed{3}$ 解答　(1)　$(4,\ -1,\ 3)$

(2)　$\mathrm{S}\left(2,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{17}{3}\right)$，PS＋QS の最小値は $\sqrt{41}$

$\boxed{4}$ 解答　(ア)　$\dfrac{9}{22}$　(イ)　$\dfrac{9}{22}$　(ウ)　$\dfrac{2}{11}$

$\boxed{5}$ 解答　$\mathrm{C}(-1,\ 3,\ 6)$，
$\mathrm{D}(-2,\ -1,\ 5)$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　$(x-5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=49$

(2)　$(2,\ 2,\ -4)$

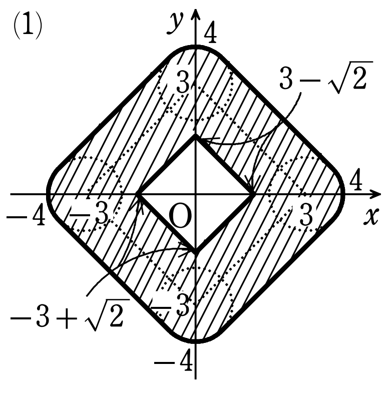
(3)　$\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{12}{7}\right)$

(4)　$\left(\dfrac{26}{7},\ \dfrac{22}{7},\ -\dfrac{4}{7}\right)$

(5)　$\left(\dfrac{19}{3},\ \dfrac{17}{3},\ -\dfrac{14}{3}\right)$

$\boxed{7}$ 解答［図］ 境界線を含む；面積は $24\sqrt{2}-4+\pi$

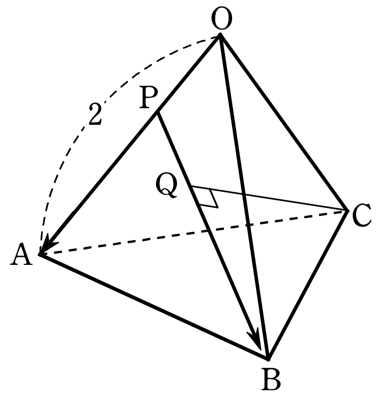
(1)



$\boxed{8}$ 解答　$3\leqq c<\sqrt{10}$

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (kは実数) とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 60^\circ-|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos 0^\circ\\&=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot2k\cdot1=2-4k\end{aligned}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=1$ より　$2-4k=1$

よって，$k=\dfrac{1}{4}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ (tは実数) とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\\&=\left\{\frac{1}{4}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right\}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=\frac{1}{4}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&\qquad-\frac{1}{16}(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\frac{1}{4}t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=\frac{1}{2}(1-t)+4t-2-\frac{1}{4}(1-t)-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\\&=\frac{2-2t+16t-8-(1-t)-2t+2}{4}=\frac{13t-5}{4}\end{aligned}$$

PB⊥CQ より $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$ であるから　$\dfrac{13t-5}{4}=0$

よって，$t=\dfrac{5}{13}$ であり　PB：PQ＝13：5

2 ℓ 上の点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$，m 上の点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$，s，t を実数の変数とすると，条件から

$$\vec{p}=(1,\ -2,\ 0)+s(2,\ 0,\ 1)=(2s+1,\ -2,\ s)$$
$$\vec{q}=(3,\ 12,\ -4)+t(1,\ 1,\ 1)=(t+3,\ t+12,\ t-4)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{q}-\vec{p}=(t+3,\ t+12,\ t-4)-(2s+1,\ -2,\ s)$
$=(-2s+t+2,\ t+14,\ -s+t-4)$ ……①

線分 PQ の長さが最小となるのは，PQ⊥ℓ かつ PQ⊥m すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{a}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{b}$ となるときである。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=0$ から　$(-2s+t+2)\cdot2+(t+14)\cdot0+(-s+t-4)\cdot1=0$

すなわち　$-5s+3t=0$ ……②

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b}=0$ から　$(-2s+t+2)\cdot1+(t+14)\cdot1+(-s+t-4)\cdot1=0$

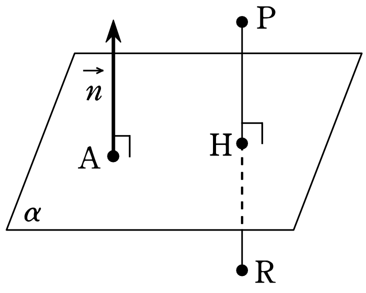
すなわち　$-3s+3t+12=0$ ……③

②，③ から　　$s=-6,\ t=-10$

これらを ① に代入すると　　$\overrightarrow{PQ}=(4,\ 4,\ -8)=4(1,\ 1,\ -2)$

ゆえに　　$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=4\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=4\sqrt{6}$

$\boxed{3}$ (1)　$\overrightarrow{PR} /\!/ \vec{n}$ であるから，$\overrightarrow{PR}=k\vec{n}$ (k は実数) と表される。



よって　　$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}$

$=\overrightarrow{OP}+k\vec{n}$

$=(-2,\ 1,\ 7)+k(-3,\ 1,\ 2)$

$=(-3k-2,\ k+1,\ 2k+7)$

線分 PR と平面 α の交点を H とすると，H は線分 PR の中点であるから

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}}{2}$$

$$=\left(\frac{-2+(-3k-2)}{2},\ \frac{1+(k+1)}{2},\ \frac{7+(2k+7)}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{-3k-4}{2},\ \frac{k+2}{2},\ k+7\right)$$

よって　　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$

$$=\left(\frac{-3k-6}{2},\ \frac{k-2}{2},\ k+3\right)$$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AH}$ であるから　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

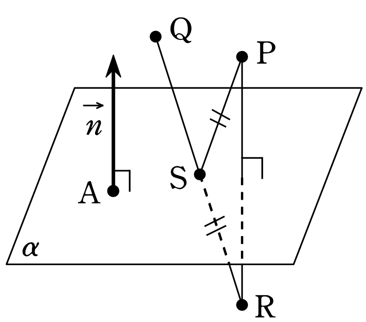
すなわち　　$-3\times(-3k-6)+1\times(k-2)+2\times2(k+3)=0$

これを解いて　　$k=-2$

よって　　$\overrightarrow{OR}=(4,\ -1,\ 3)$

すなわち，点 R の座標は　　$(4,\ -1,\ 3)$

(2)　点 P と 点 R は平面 α に関して対称な点であるから，



平面 α 上の点 S について　　$PS=RS$

よって　　$PS+QS=RS+QS\geqq QR$

ゆえに，$PS+QS$ を最小にする点 S は，直線 QR と平面 α の交点である。

このような S について，$\overrightarrow{OS}=(1-t)\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{OR}$ (t は実数) と表される。

よって　　$\overrightarrow{OS}=(1-t,\ 3-3t,\ 7-7t)+(4t,\ -t,\ 3t)$

$=(3t+1,\ -4t+3,\ -4t+7)$

ゆえに　　$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OA}$

$=(3t,\ -4t+1,\ -4t+3)$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AS}$ から　　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AS}=0$

すなわち　$-3\times3t+1\times(-4t+1)+2\times(-4t+3)=0$

これを解いて　$t=\dfrac{1}{3}$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\left(2,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{17}{3}\right)$

すなわち，求める点 S の座標は $\left(2,\ \dfrac{5}{3},\ \dfrac{17}{3}\right)$ であり，PS＋QS の最小値は　QR

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(4,\ -1,\ 3)-(1,\ 3,\ 7)=(3,\ -4,\ -4)$$

したがって　$\mathrm{QR}=\sqrt{3^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}+z\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2x,\ 2y,\ 3z)$ とおく。

点 H は，3 点 A，B，C が定める平面上にあるから　$x+y+z=1$　…… ①

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

すなわち　$2x\cdot(-2)+2y\cdot2+3z\cdot0=0$　　よって　$y=x$　…… ②

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから　$z=\dfrac{4}{9}x$　…… ③

①，②，③ より　$x=\dfrac{9}{22}$，$y=\dfrac{9}{22}$，$z=\dfrac{2}{11}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}={}^{ア}\dfrac{9}{22}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+{}^{イ}\dfrac{9}{22}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+{}^{ウ}\dfrac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\boxed{5}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2-1,\ 3-(-1),\ 3-2)=(1,\ 4,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=(3-2,\ 3-3,\ 2-3)=(1,\ 0,\ -1)$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=1\cdot1+4\cdot0+1\cdot(-1)=0$

したがって　$\mathrm{AB}\perp\mathrm{BE}$

また　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

よって，四角形 ABCD が正方形になるのは，次の

[1] または [2] のいずれかの場合である。

[1]　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{BE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,\ 3,\ 3)+3(1,\ 0,\ -1)=(5,\ 3,\ 0)$

点 C の z 座標が正でないから不適。

[2]　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{BE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-3\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ のとき

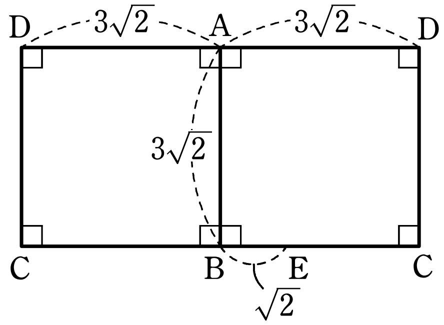
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2,\ 3,\ 3)-3(1,\ 0,\ -1)=(-1,\ 3,\ 6)$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1,\ -1,\ 2)-3(1,\ 0,\ -1)$

$=(-2,\ -1,\ 5)$

点 C，D の z 座標が正であるから適する。

以上から　C$(-1,\ 3,\ 6)$，D$(-2,\ -1,\ 5)$



6 (1)　$(x-5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=7^2$　すなわち　$(x-5)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=49$

(2)　$\overrightarrow{OQ}=k\vec{a}$ $(k>0)$ とすると　$\overrightarrow{OQ}=(k,\ k,\ -2k)$　すなわち　$Q(k,\ k,\ -2k)$

Q は球面 S 上の点であるから　$(k-5)^2+(k-4)^2+(-2k-2)^2=49$

整理すると　$3k^2-5k-2=0$

$k>0$ から　$k=2$　　よって　$\overrightarrow{OQ}=(2,\ 2,\ -4)$

(3)　直線 PQ 上の任意の点 $(x,\ y,\ z)$ について

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{QP}=(2,\ 2,\ -4)+t(3,\ 2,\ 6)$$
$$=(3t+2,\ 2t+2,\ 6t-4)$$

$\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{PQ}$ から　$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

すなわち　$3(3t+2)+2(2t+2)+6(6t-4)=0$　　よって　$t=\dfrac{2}{7}$

$\overrightarrow{QN}=(3t,\ 2t,\ 6t)$ であるから

$$\overrightarrow{QN}=\left(\frac{6}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{12}{7}\right)$$

(4)　$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{ON}=\left(\dfrac{40}{7},\ \dfrac{36}{7},\ -\dfrac{32}{7}\right)$ から

$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{40}{7},\ \frac{36}{7},\ -\frac{32}{7}\right)-(2,\ 2,\ -4)=\left(\frac{26}{7},\ \frac{22}{7},\ -\frac{4}{7}\right)$$

(5)　$\overrightarrow{QR}=m\overrightarrow{QM}$ $(m>0)$ とおくと　$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OQ}+m\overrightarrow{QM}$

$\overrightarrow{OR}=(2,\ 2,\ -4)+m\left(\dfrac{26}{7},\ \dfrac{22}{7},\ -\dfrac{4}{7}\right)=\left(2+\dfrac{26}{7}m,\ 2+\dfrac{22}{7}m,\ -4-\dfrac{4}{7}m\right)$

R は球面 S 上の点であるから

$$\left(\frac{26}{7}m-3\right)^2+\left(\frac{22}{7}m-2\right)^2+\left(-\frac{4}{7}m-6\right)^2=49$$

整理すると　$6m^2-7m=0$

$m>0$ から　$m=\dfrac{7}{6}$

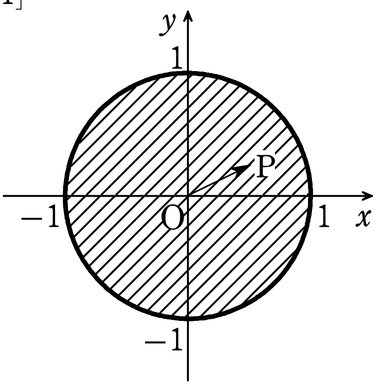
したがって　$\overrightarrow{OR}=\left(2+\dfrac{26}{7}\times\dfrac{7}{6},\ 2+\dfrac{22}{7}\times\dfrac{7}{6},\ -4-\dfrac{4}{7}\times\dfrac{7}{6}\right)$

$$=\left(\frac{19}{3},\ \frac{17}{3},\ -\frac{14}{3}\right)$$

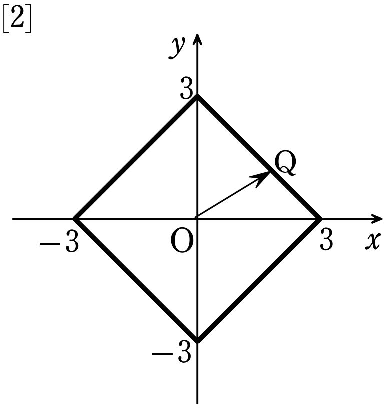
7 (1)　点 P は図 [1] の斜線部分 (ただし，境界線を含む) を動く。

また，点 Q は図 [2] の実線部分を動く。

[1]



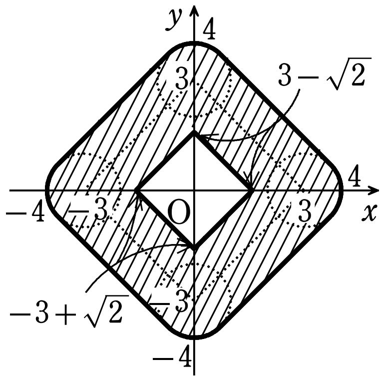
[2]



$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ から　$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OP}$

よって，点 Q を固定すると，点 R は点 Q を中心とする半径 1 の円の内部および周上を動く。

点 Q を動かすことにより，点 R が動いてできる図形は，右の図の斜線部分になる。ただし，境界線を含む。



したがって，求める面積は

$(3\sqrt{2})^2+4\times1\times3\sqrt{2}+\pi\cdot1^2-(3\sqrt{2}-2)^2$

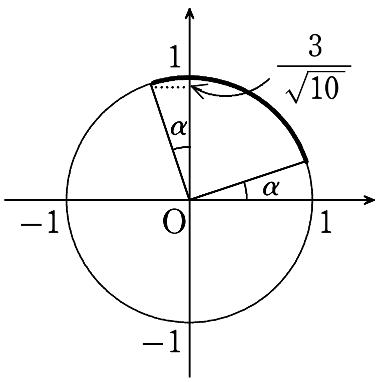
$=24\sqrt{2}-4+\pi$

8 $3\sin x+\cos x=c$ を変形すると　$\sqrt{10}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\sin x+\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cos x\right)=c$

ここで，α を $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす角とすると

$$\sqrt{10}\sin(x+\alpha)=c$$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{10}}\quad\cdots\cdots①$$



$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より　$\alpha\leqq x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$

よって，① が異なる 2 つの解をもつ条件は

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\leqq\frac{c}{\sqrt{10}}<1$$

したがって　$3\leqq c<\sqrt{10}$