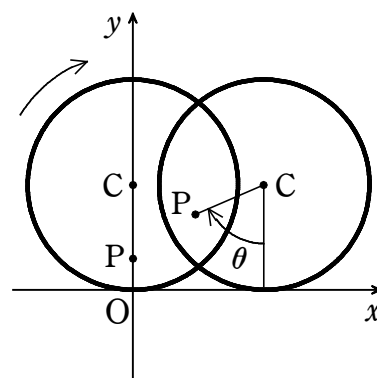


試験時間60分 解答は解答用紙に書いて、提出してください

- 1 曲線 $y = e^{-x} \sin x$ ($x \geq 0$) と x 軸で囲まれた図形で、 x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に $S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$ とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k$ を求めよ。

- 2 媒介変数 t を用いて $x = \sin 2t$, $y = \sin 5t$ と表される座標平面上の曲線を C とする。 C と y 軸が交わる座標平面上の点の個数を求めよ。

- 3 中心が C で半径 a の円板と、 C からの距離が b で円板に対して固定されている点 P とがある。最初、図のように C, P が y 軸上に位置するようにおかれた円板が、 x 軸に接しながら滑らずに回転し、点 P も円板とともに移動する。円板が角 θ だけ回転したとき、 P の座標を $P(x, y)$ とすると $x = \boxed{}, y = \boxed{}$ と表される。



- 4 サイクロイド曲線 $C: x(\theta) = \theta - \sin \theta$, $y(\theta) = 1 - \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) について、次の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $A(x(\alpha), y(\alpha))$ ($0 < \alpha < 2\pi$) における法線と x 軸との交点 B の座標を求めよ。
- (2) α が $\frac{\pi}{2}$ から π まで動くとき、線分 AB が存在する領域の面積を求めよ。

5 a を正の定数とする. $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ で表される曲線を C とするとき

- (1) 曲線 C の $a \leq y \leq t$ の部分の長さ $l(t)$ を a と t を用いて表せ.
- (2) 直線 $y = t$ ($a < t$) と曲線 C で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とするとき $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{l(t) \log t}$ を求めよ.

6

曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸の周りに 1 回転させてできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口があり、時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において、容器に残っている水の深さが h のときの水の体積を V とする。

このとき、 V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ である。

- (1) 水の深さ h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。
- (2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。