空間ベクトル

基本は平面のときと同じ

○ただし，空間では基準となるベクトルが３本になる。

（平面）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

（空間）$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

○空間では，空間内の平面を扱う。（三種）

（１）Ｐが平面 ABC 上　⇔　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

（２）Ｐが平面 ABC 上　⇔　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表すと $a+b+c=1$

（３）座標空間内では，点 $\mathrm{A}\left(x_0,\,y_0,\,z_0\right)$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}=\left(a,\,b,\,c\right)$ の平面は，

$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)+d=0$$

○面積公式

外積

$\boxed{\text{外積の定義}}$

$\overrightarrow{a}=\left(x_1,\,y_1,\,z_1\right)$ ，$\overrightarrow{b}=\left(x_2,\,y_2,\,z_2\right)$ に対して，

$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ ＝（$y_1z_2-z_1y_2$，$z_1x_2-x_1z_2$，$x_1y_2-y_1x_2$）と定め，

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の外積と呼ぶ。

$\boxed{\text{性質}}$

（１）$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の両方に垂直

（２）$\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|$ は，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で張られる平行四辺形の面積に等しい

（３）$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ の向きは，$\overrightarrow{a}$ から $\overrightarrow{b}$ へ右ねじを回して決まる向き

外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ の覚え方

$\overrightarrow{a}$ ：（ x_1 ③ y_1 ① z_1 ②） x_1

$\overrightarrow{b}$ ：（ x_2 y_2 z_2 ） x_2

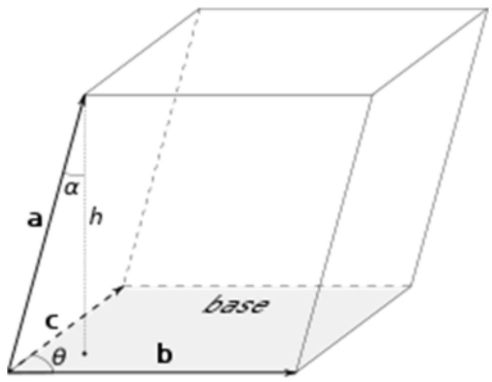
$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ ：（y_1z_2 ① z_1y_2，z_1x_2 ② x_1z_2，x_1y_2 ③ y_1x_2）

空間ベクトル・チェックリスト

○　空間の問題では，基準となるベクトルの大きさ・内積を準備しておくとよい。

○　空間内の直線は，通る点と方向ベクトルで決まる
○　空間内の平面は，通る点と法線ベクトルで決まる。
○　空間内の球面は，中心と半径で決まる。

○　垂線の足は，空間でも平面と同じ
○　座標空間内の四面体　⇒　点と平面の距離公式の活用　（法線ベクトルで証明）
○　座標空間内の平行六面体の体積　⇒　「スカラー三重積」



$$V=\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で張られる四面体の場合，係数に $\dfrac{1}{6}$ が付く

【補充問題】YAWARAKA 先生のテキストより 平面ベクトル篇

標準問題

⑫**12-標-1**

四面体 ABCD において，線分 BD を 3：1 に内分する点を E，線分 CE を 2：3 に内分する点を F，線分 AF を 1：2 に内分する点を G，直線 DG が 3 点 A，B，C を含む平面と交わる点を H とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ。

⑫**12-標-2**

辺の長さが 1 である正四面体 OABC がある。辺 OA を 1：2 に内分する点を P，辺 OB を 3：1 に内分する点を Q，辺 OC の中点を R，△ABC の重心を G とする。さらに，直線 OG と平面 PQR の交点を S，R から平面 OAB に下ろした垂線の足を H とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表せ。

⑫**12-標-3**

法線ベクトルが $\overrightarrow{p}=\left(-1,2,1\right)$ である平面鏡に，光線がベクトル $\overrightarrow{q}=\left(2,-1,2\right)$ の方向で入射している。反射光線の方向の単位ベクトルを求めよ。

⑫**12-標-4**

点 $\mathrm{A}\left(-6,2,6\right)$ を通り，方向ベクトルが $\overrightarrow{l}=\left(2,1,-1\right)$ の直線 l と，点 $\mathrm{P}\left(0,-1,-3\right)$ が与えられている。

(1) 点 P から直線 l に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

(2) 直線 l 上の 2 点 Q, R に対し，三角形 PQR が正三角形になるような Q, R の座標を求めよ。

⑫**12-標-5**

空間に原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(1, 2, 2)$, $\mathrm{B}(2, 3, 6)$, $\mathrm{C}(6, 1, 8)$ がある。

(1)　3 点 OAB で定まる平面 α の方程式を求めよ。

(2)　OA，OB を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ。

(3)　OA，OB，OC を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ。

⑫**12-標-6**

O_1 を中心とする球面 S_1 と O_2 を中心とする球面 S_2 の方程式がそれぞれ次のように与えられている。

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+6x-18y+6z+50=0 \\ x^2+y^2+z^2-2x-34y-10z+194=0 \end{cases}$$

また，これらが交わってできる円を C とする。

(1)　円 C の含む平面 α の方程式を求めよ。

(2)　円 C の中心 O_3 の座標，および円 C の半径を求めよ。

⑫**12-標-7**

球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ と平面 $x=t$ との交線を C とする $(0<t<1)$。

点 $\mathrm{P}(0, 0, 2)$ と C 上の点 Q を通る直線と，xy 平面との交点を R とする。Q が C 上を動くとき xy 平面上で R の描く軌跡を求めよ。

⑫**12-標-8**

空間において，点 $\mathrm{A}(0, -1, 2)$ と球面 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ が与えられている。点 A から球面 S への任意の接線をひき，それが xy 平面と交わる点を P とする。点 P はどんな曲線上にあるか。

発展問題

⑫**12-発-1**

四面体 OABC の辺 OA，OB 上にそれぞれ点 D，E をとる。ただし点 D は点 A，O とは異なり，AE と BD の交点 F は線分 AE，BD をそれぞれ 2：1，3：1 に内分している。また辺 BC を $t:1\ (t>0)$ に内分する点 P をとり，CE と OP の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}, t$ を用いて表せ。

(3)　直線 FQ と平面 ABC が平行になるような t の値を求めよ。

⑫**12-発-2**

四面体 OABC があり，∠AOB＝∠AOC＝90°，∠BOC＝60°，辺 OA，OB，OC の長さはそれぞれ $a, a, 2$ である。このとき，点 O から三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を P とするとき，P が三角形 ABC の内部（辺上を含む）にあるための a の条件を求めよ。

⑫**12-発-3**

四面体 OABC とその内部の点 P があり，次の式を満たしている。

$$2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+5\overrightarrow{\mathrm{BP}}+7\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{0}$$

2 つの四面体 OABC と PABC の体積比を求めよ。

⑫**12-**発**-4**

点Oを原点とする座標空間内に3点$A(2, 1, 2)$, $B(6, 2, 2)$, $C(5, 7, 5)$ がある。

(1)　B，Cから直線OAに引いた垂線の足H，Kの座標を求めよ。

(2)　点Pが直線OA上を動くとき，BP＋CPを最小にするPの座標を求めよ。

⑫**12-**発**-5**

空間に2点$A(\sqrt{3}, 0, 0)$，$B(0, \sqrt{2}, 0)$がある。z軸上に点$P(0, 0, p)$　$(p>0)$があり，$\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$のなす角は45°である。また，3点A，B，Pを通る平面をαとする。

(1)　pの値を求めよ。

(2)　平面αに関して，原点$O(0, 0, 0)$と対称な点の座標を求めよ。

⑫**12-**発**-6**

a，b，cを0でない実数として，座標空間内に3点$A(a,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ b,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ c)$をとる．また，空間内の点Pは$\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}\right)=0$を満たしながら動くとする．

(1) 点Pはある点Qを中心とする球面上にあることを示せ．

(2) (1)の点Qは3点A，B，Cを通る平面上にあることを示せ．

(3) 四面体ABCPの体積の最大値を求めよ．

⑫**12-**発**-7**

xyz 空間内の原点 O(0, 0, 0) を中心とし，点 A(0, 0, -1) を通る球面を S とする．S の外側にある点 P に対し，OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を α とする．点 P と点 A から平面 α へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．

このとき，

$$\mathrm{PQ} \leqq \mathrm{AR}$$

であるような点 P の動く範囲の体積を求めよ．

⑫**12-**発**-8**

空間内で原点 O を中心とする半径 1 の球面上に，N$(0,0,1)$, S$(0,0,-1)$と異なる点 P をとって，P と N，P と S を結ぶ直線が xy 平面と交わる点を，それぞれ Q$(x, y, 0)$，R$(X, Y, 0)$とする。Q が円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上を動くとき，R はどんな曲線上を動くか。

⑫**12-発-9**

空間における曲線 C が，媒介変数 t（$0 \leqq t < 2\pi$）を用いて

$$x = \sqrt{3}\cos t + \sin t$$
$$y = \sqrt{3}\cos t - \sin t$$
$$z = 2\sin t$$

で与えられる．

(1) 曲線 C は原点を中心とする円であることを示せ．

(2) 曲線 C を xy 平面へ正射影してできる図形の方程式を求めよ．

⑫**12-発-10**

xyz 空間の 2 点 P，Q を△ OPQ（O は原点）の面積が正の一定値 S となるように動かす．P，Q から xy 平面に引いた垂線をそれぞれ PP′，QQ′ とし，△ OP′Q′ の面積を S_1 とする．ただし，O，P′，Q′ が同一直線上にあるときは $S_1 = 0$ とする．同様に P，Q から yz 平面，zx 平面に垂線を引いて作った三角形の面積を S_2，S_3 とする．

(1) $S^2 = {S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $S_1 + S_2 + S_3$ の最大値，最小値を求めよ．