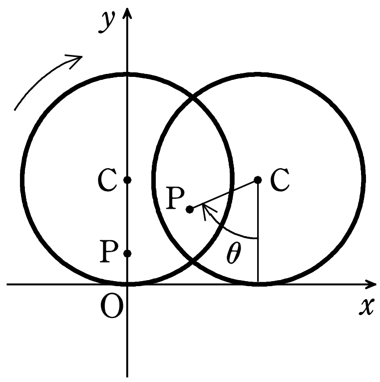
試験時間60分　　解答解説

$\boxed{1}$　曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 媒介変数 t を用いて $x=\sin 2t$，$y=\sin 5t$ と表される座標平面上の曲線を C とする。C と y 軸が交わる座標平面上の点の個数を求めよ。

$\boxed{3}$ 中心がCで半径 a の円板と，Cからの距離が b で円板に対して固定されている点Pとがある．最初，図のようにC，Pが y 軸上に位置するようにおかれた円板が，x 軸に接しながら滑らずに回転し，点Pも円板とともに移動する．円板が角 θ だけ回転したとき，Pの座標をP(x, y) とすると $x=$ ア$\boxed{}$，$y=$ イ$\boxed{}$ と表される．



$\boxed{4}$ サイクロイド曲線 C：$x(\theta)=\theta-\sin\theta$，$y(\theta)=1-\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ について，次の問いに答えよ．

(1) C 上の点A$(x(\alpha),\ y(\alpha))$ $(0<\alpha<2\pi)$ における法線と x 軸との交点Bの座標を求めよ．

(2) α が $\dfrac{\pi}{2}$ から π まで動くとき，線分ABが存在する領域の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ a を正の定数とする．$y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ で表される曲線を C とするとき

(1)　曲線 C の $a\leqq y\leqq t$ の部分の長さ $l(t)$ を a と t を用いて表せ．

(2)　直線 $y=t$ $(a<t)$ と曲線 C で囲まれる部分の面積を $S(t)$ とするとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{l(t)\log t}$ を求めよ．

$\boxed{6}$　曲線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を y 軸の周りに1回転させてできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口があり，時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。
時刻 t において，容器に残っている水の深さが h のときの水の体積を V とする。
このとき，V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ である。

(1)　水の深さ h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2)　容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答 $\dfrac{e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$

$\boxed{2}$ 解答 3 個

$\boxed{3}$ 解答 (ア) $a\theta-b\sin\theta$　(イ) $a-b\cos\theta$

$\boxed{4}$ 解答 (1) $\mathrm{B}(\alpha,\ 0)$　(2) $\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{3}{2}$

$\boxed{5}$ 解答 (1) $l(t)=2\sqrt{t^2-a^2}$　(2) a

$\boxed{6}$ 解答 (1) $\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$　(2) $\dfrac{2}{3}\pi$

$\boxed{1}$ $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ とする。

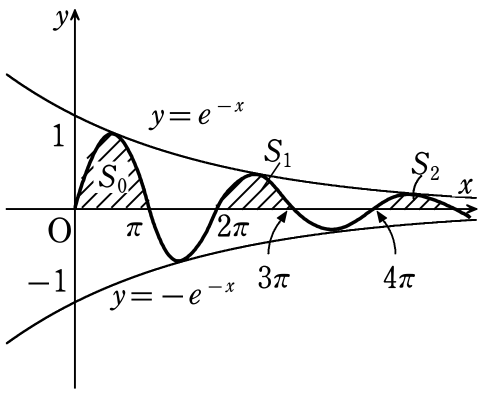
曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ と x 軸の交点の x 座標は，$e^{-x}\sin x=0$ から

$$\sin x=0$$

ゆえに　$x=n\pi$

また，$y\geqq 0$ となるのは，$e^{-x}>0$ であるから，$\sin x\geqq 0$ のときである。

よって　$2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$



ゆえに　$S_k=\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\cos x\,dx$

$$=\Big[-e^{-x}\cos x\Big]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}-\left\{\Big[e^{-x}\sin x\Big]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}+\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\right\}$$

すなわち　$S_k=e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}-S_k$

したがって　$S_k=\dfrac{1}{2}\{e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}\}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}S_k=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n}e^{-(2k+1)\pi}+\sum_{k=0}^{n}e^{-2k\pi}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-\pi}\{1-e^{-2(n+1)\pi}\}}{1-e^{-2\pi}}+\frac{1-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}\right]$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}S_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\pi}+1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$

$\boxed{2}$ $x=0$ とすると　$\sin 2t=0 \iff 2t=n\pi$ （n は整数）

$$\iff t=\frac{n}{2}\pi \quad (n\text{ は整数})$$

このとき　$y=\sin 5t=\sin\dfrac{5n\pi}{2}=\sin\left(2n\pi+\dfrac{n}{2}\pi\right)=\sin\dfrac{n}{2}\pi$

[1]　$n=4m$ （m は整数）のとき

$$y=\sin\frac{4m}{2}\pi=\sin 2m\pi=\sin 0=0$$

[2]　$n=4m+1$ （m は整数）のとき

$$y=\sin\frac{4m+1}{2}\pi=\sin\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

[3]　$n=4m+2$ (m は整数) のとき

$$y=\sin\frac{4m+2}{2}\pi=\sin(2m\pi+\pi)=\sin\pi=0$$

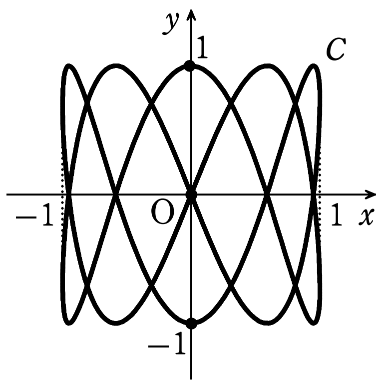
[4]　$n=4m+3$ (m は整数) のとき

$$y=\sin\frac{4m+3}{2}\pi=\sin\left(2m\pi+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\frac{3}{2}\pi=-1$$

よって，C と y 軸の交点は

$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$　の 3 個

参考　曲線 C はリサージュ曲線の 1 つであり，C の概形は右の図のようになる。



3　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(a\theta,\ a)-(b\sin\theta,\ b\cos\theta)$

ゆえに　$x=$ ア $a\theta-b\sin\theta$，

$y=$ イ $a-b\cos\theta$

4　(1)　$\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ から　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

ゆえに，$\theta=\alpha$ ($0<\alpha<\pi$，$\pi<\alpha<2\pi$) における法線の方程式は

$$y=-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\{x-(\alpha-\sin\alpha)\}+1-\cos\alpha$$

$y=0$ とおくと

$$x=(1-\cos\alpha)\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\alpha-\sin\alpha=\alpha$$

ゆえに　$\mathrm{B}(\alpha,\ 0)$

また　$\theta=\pi$ のとき　$x=\pi$，$y=2$，$\dfrac{dy}{dx}=0$

よって，法線の方程式は　$x=\pi$

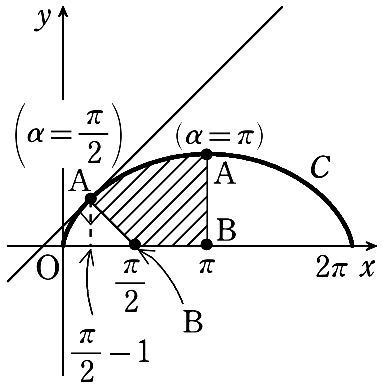
ゆえに　$\mathrm{B}(\pi,\ 0)$

以上から　$0<\alpha<2\pi$ のとき　$\mathrm{B}(\alpha,\ 0)$

(2) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　A$\left(\dfrac{\pi}{2}-1,\ 1\right)$，B$\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$

$\alpha=\pi$ のとき　A$(\pi,\ 2)$，B$(\pi,\ 0)$

ゆえに　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$ のとき



線分 AB が存在する領域は図の斜線部分である．
ただし，境界線を含む．
よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\pi} y\,dx-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{1}{2}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1-\cos\theta)^2d\theta-\frac{1}{2}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta-\frac{1}{2}$$

$$=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{2}$$

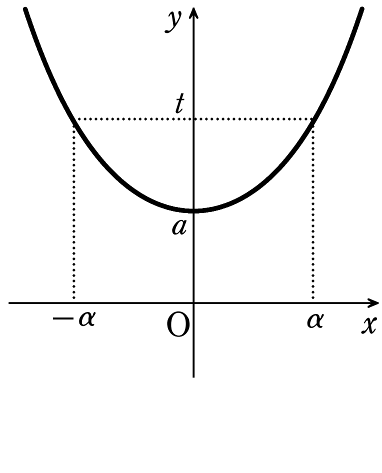
$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{2}$$

$\boxed{5}$ (1) $C：y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$，$a>0$

$\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=t$，$e^{\frac{x}{a}}=X$ とおくと　$X^2-\dfrac{2t}{a}X+1=0$

よって　　$X=e^{\frac{x}{a}}=\dfrac{t}{a}\pm\sqrt{\dfrac{t^2}{a^2}-1}=\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-a^2}}{a}$

ゆえに　　$\dfrac{x}{a}=\log\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-a^2}}{a}$



よって　　$x=a\log\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-a^2}}{a}$

$\alpha=a\log\dfrac{t+\sqrt{t^2-a^2}}{a}$

$\beta=a\log\dfrac{t-\sqrt{t^2-a^2}}{a}=-\alpha$

とおくと，曲線 C は y 軸に関して対称であるから

$$l(t)=2\int_0^{\alpha}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=2\int_0^{\alpha}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\alpha}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

$$=a\left[e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{\alpha}$$

$$=a\left(e^{\frac{\alpha}{a}}-e^{-\frac{\alpha}{a}}\right)=a\left(e^{\frac{\alpha}{a}}-e^{\frac{\beta}{a}}\right)$$

$$=a\left(\frac{t+\sqrt{t^2-a^2}}{a}-\frac{t-\sqrt{t^2-a^2}}{a}\right)$$

$$=2\sqrt{t^2-a^2}$$

$\boxed{\text{別解}}$ 曲線 $x=a\log\dfrac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}$ について $a\leqq y\leqq t$ での長さを $l_1(t)$ とする.

$$\frac{dx}{dy}=a\frac{\frac{1}{a}\left(1+\frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}}\right)}{\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a}}=\frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\frac{y^2}{y^2-a^2}$$

よって　$l_1(t)=\displaystyle\int_a^t\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

$$=\int_a^t\frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}}dy=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{t^2}\frac{ds}{\sqrt{s-a^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{s-a^2}\right]_{a^2}^{t^2}=\sqrt{t^2-a^2}$$

曲線 $x=a\log\dfrac{y-\sqrt{y^2-a^2}}{a}$ の $a\leqq y\leqq t$ での長さを $l_2(t)$ とすると　$l_2(t)=l_1(t)$

よって，曲線 C の $a\leqq y\leqq t$ の部分の長さは

$$l(t)=l_1(t)+l_2(t)=2l_1(t)=2\sqrt{t^2-a^2}$$

(2)　$S(t)=2\displaystyle\int_0^{\alpha}\left\{t-\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\right\}dx$

$$=2\alpha t-a^2\left[e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right]_0^{\alpha}$$

$$=2ta\log\frac{t+\sqrt{t^2-a^2}}{a}-a^2\left(e^{\frac{\alpha}{a}}-e^{-\frac{\alpha}{a}}\right)$$

$$=2ta\log\frac{t+\sqrt{t^2-a^2}}{a}-2a\sqrt{t^2-a^2}$$

よって

$$\frac{S(t)}{l(t)\log t}=\frac{at\log\left(\frac{t+\sqrt{t^2-a^2}}{a}\right)-a\sqrt{t^2-a^2}}{\sqrt{t^2-a^2}\cdot\log t}$$

$$=\frac{a\log\dfrac{t\left(1+\sqrt{1-\dfrac{a^2}{t^2}}\right)}{a}-a\sqrt{1-\dfrac{a^2}{t^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{t^2}}\log t}$$

$$=\frac{a\left\{\log t-\log a+\log\left(1+\sqrt{1-\dfrac{a^2}{t^2}}\right)\right\}-a\sqrt{1-\dfrac{a^2}{t^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{t^2}}\cdot\log t}$$

$\longrightarrow a\quad (t\longrightarrow\infty)$

$\boxed{6}$ (1)　$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h y\,dy$

h で微分すると　$\dfrac{dV}{dh}=\pi h$

このとき　$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=\pi h\dfrac{dh}{dt}$

よって　　$\pi h\dfrac{dh}{dt}=-\sqrt{h}$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$$

(2)　求める時間 T は，$h=1$ から $h=0$ までの時刻 t の変化量である。

(1) より，$\dfrac{dt}{dh}=-\pi\sqrt{h}$ であるから

$$T=\int_1^0(-\pi\sqrt{h})dh=\pi\int_0^1\sqrt{h}\,dh=\pi\left[\frac{2}{3}h\sqrt{h}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi$$