試験時間60分　　解答解説

$\boxed{1}$ 不等式 $\log_3(x+2)+\log_3 x \leqq 1$ を解け。

$\boxed{2}$ $y=3(4^x+4^{-x})-20(2^x+2^{-x})+9$ とする.

(1) $2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t の式で表せ.

(2) y の最小値およびそのときの x の値を求めよ.

$\boxed{3}$ 近似値 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ を利用して

(1) 18^{35} の桁数を求めよ.

(2) 18^{35} の最高位の数字を求めよ.

$\boxed{4}$ $y=5\times 7^x$ のグラフは，$y=7^x$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{}$ だけ平行移動したものである.

$\boxed{5}$ $\log_{10}\left(\tan\frac{\pi}{10}\right)+\log_{10}\left(\tan\frac{2\pi}{10}\right)+\log_{10}\left(\tan\frac{3\pi}{10}\right)+\log_{10}\left(\tan\frac{4\pi}{10}\right)$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ $0°<x<90°$, $\log_{\sin x}\cos x=\frac{2}{3}$ のとき，$\log_{\cos x}\sqrt[3]{\tan x}$ の値を求めよ.

$\boxed{7}$ 実数 x, y が $4^x+2^x\cdot 3^y+9^y=7$ を満たすとき，$2^{x+1}+3^{y+1}$ がとりうる値の範囲を求めよ.

$\boxed{1}$ 解答　$0 < x \leqq 1$

$\boxed{2}$ 解答　(1)　$y = 3t^2 - 20t + 3\ (t \geqq 2)$　　(2)　$x = \pm \log_2 3$ のとき最小値 $-\dfrac{91}{3}$

$\boxed{3}$ 解答　(1)　44 桁　　(2)　8

$\boxed{4}$ 解答　$-\log_7 5$

$\boxed{5}$ 解答　0

$\boxed{6}$ 解答　$\dfrac{1}{6}$

$\boxed{7}$ 解答　$2\sqrt{7} < 2^{x+1} + 3^{y+1} \leqq \dfrac{14}{\sqrt{3}}$

1　真数は正であるから　$x+2>0$ かつ $x>0$　すなわち　$x>0$ ……①

不等式を変形すると　$\log_3(x+2)x \leqq \log_3 3$

底 3 が 1 より大きいから　$(x+2)x \leqq 3$

式を整理して　$x^2+2x-3 \leqq 0$

これを解くと　$-3 \leqq x \leqq 1$ ……②

①，②の共通範囲を求めて　$0 < x \leqq 1$

2　(1)　$y=3\{(2^x+2^{-x})^2-2\}-20(2^x+2^{-x})+9$

$=3(2^x+2^{-x})^2-20(2^x+2^{-x})+3$　ゆえに　$y=3t^2-20t+3$

また，$2^x>0, 2^{-x}>0$ であり，相加・相乗平均の大小関係により

$t=2^x+2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$ から　$t \geqq 2$

等号成立は　$2^x=2^{-x}$ から　$2^x=1$　よって　$x=0$ のとき.

(2)　$y=3\left(t-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{100}{3}+3=3\left(t-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{91}{3}$　$(t \geqq 2)$

$t=\frac{10}{3}$ のとき　y は最小値 $-\frac{91}{3}$ をとる.

$2^x+2^{-x}=\frac{10}{3}$ の両辺に $3 \cdot 2^x$ を掛けて　$3(2^x)^2-10 \cdot 2^x+3=0$

$(2^x-3)(3 \cdot 2^x-1)=0$　これを解いて　$2^x=3, \frac{1}{3}$ から　$x=\log_2 3, -\log_2 3$

3　(1)　$\log_{10}18^{35}=35\log_{10}18=35(\log_{10}2+2\log_{10}3)=35(0.3010+2\times0.4771)=43.9320$

よって　$43<\log_{10}18^{35}<44$　ゆえに　$10^{43}<18^{35}<10^{44}$

したがって，18^{35} は 44 桁の数である.

(2)　(1) から　$\log_{10}18^{35}=43+0.9320$

ところで　$\log_{10}8=3\log_{10}2=0.9030, \log_{10}9=2\log_{10}3=0.9542$

よって　$8=10^{0.9030}<10^{0.9320}<10^{0.9542}=9$

ゆえに　$8\times10^{43}<10^{43.9320}<9\times10^{43}$　すなわち　$8\times10^{43}<18^{35}<9\times10^{43}$

したがって，18^{35} の最高位の数字は 8 である.

4　$y=5\times7^x=7^{\log_7 5}\cdot7^x=7^{x+\log_7 5}=7^{x-(-\log_7 5)}$ から $y=5\times7^x$ のグラフは $y=7^x$ のグラフを x 軸方向に $-\log_7 5$ だけ平行移動したもの.

$\boxed{5}$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$ において　$\tan\dfrac{4\pi}{10}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{10}}$，$\tan\dfrac{3\pi}{10}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{2\pi}{10}}$

よって　$\log_{10}\left(\tan\dfrac{\pi}{10}\right)+\log_{10}\left(\tan\dfrac{2\pi}{10}\right)+\log_{10}\left(\tan\dfrac{3\pi}{10}\right)+\log_{10}\left(\tan\dfrac{4\pi}{10}\right)$

$=\log_{10}\left(\tan\dfrac{\pi}{10}\right)\left(\tan\dfrac{2\pi}{10}\right)\left(\tan\dfrac{3\pi}{10}\right)\left(\tan\dfrac{4\pi}{10}\right)$

$=\log_{10}\left(\tan\dfrac{\pi}{10}\right)\left(\tan\dfrac{2\pi}{10}\right)\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{2\pi}{10}}\right)\left(\dfrac{1}{\tan\dfrac{\pi}{10}}\right)=\log_{10}1=0$

$\boxed{6}$ $\log_{\cos x}\sqrt[3]{\tan x}=\log_{\cos x}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}(\log_{\cos x}\sin x-1)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\log_{\sin x}\cos x}-1\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{2}-1\right)=\dfrac{1}{6}$

$\boxed{7}$ $2^{x+1}+3^{y+1}=k$ $(k>0)$ とおき，$2^x=X$, $3^y=Y$ とおくと，$X>0$, $Y>0$,

$X^2+XY+Y^2=7$ ……①　　$2X+3Y=k$ ……②

$X\geqq 0$, $Y\geqq 0$ とすると，①，② から $X=\sqrt{7}$，$Y=0$ のとき k は最小値 $2\sqrt{7}$ をとる．

よって　$k>2\sqrt{7}$　　また ② から　$3Y=k-2X$

①×9 に代入すると　$9X^2+3X(k-2X)+(k-2X)^2=63$

よって　$7X^2-kX+k^2-63=0$ …… ③

ゆえに，③ が $X>0$ となる解 X をもつような k の値の範囲を求める．

③ の判別式を D とすると　$D=k^2-28(k^2-63)=-9(3k^2-196)$

$D\geqq 0$ とすると　$3k^2-196\leqq 0$

$k>2\sqrt{7}$ であるから　$2\sqrt{7}<k\leqq\dfrac{14}{\sqrt{3}}$ …… ④

$f(X)=7X^2-kX+k^2-63$ とおくと　$f(X)=7\left(X-\dfrac{k}{14}\right)^2+\dfrac{27}{28}k^2-63$

$\dfrac{k}{14}>0$ であるから，④ のとき ③ は常に正の解をもつ．

ゆえに　$2\sqrt{7}<2^{x+1}+3^{y+1}\leqq\dfrac{14}{\sqrt{3}}$