試験時間60分　　解答解説

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^2 2x\,dx$　　(2) $\int \cos 3x \cos 5x\,dx$

$\boxed{2}$ 不定積分 $\int \dfrac{5}{2x^2-7x+3}dx$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 不定積分 $\int x^2 \sin x\,dx$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 定積分 $\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx$ を求めよ.

$\boxed{5}$ $x>0$ に対し関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}$ と定め，$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおく。

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を求めよ。

(2) $\dfrac{d}{dx}g(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ (1) 不定積分 $\int \sin^2 t\,dt$, $\int \sin t \cos t\,dt$, $\int \cos^2 t\,dt$ をそれぞれ求めよ。

(2) 等式 $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(t-x)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{7}$ 関数 $f(x)$ は，$f(0)=0$ を満たすものとし，また，$g(x)=\int_0^x (e^x+e^t)f'(t)\,dt$ とおく。

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を計算せよ。

(2) $e^x f(x)=-3x^2e^x+g(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{8}$ 関数 $f(x)=\int_{-x}^{2x} t\sin t\,dt$ について，次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，$f(x)$ が最大値をとる x の値を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(3) $0 \leqq x \leqq \pi$ において，$f(x)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{1}$ 解答　C は積分定数とする。

(1)　$\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}\sin 4x+C$　　(2)　$\dfrac{1}{16}\sin 8x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

$\boxed{2}$ 解答　$\log\left|\dfrac{x-3}{2x-1}\right|+C$　(C は積分定数)

$\boxed{3}$ 解答　$-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$　(C は積分定数)

$\boxed{4}$ 解答　$\dfrac{32}{15}\sqrt{2}$

$\boxed{5}$ 解答　(1)　$\dfrac{1}{1+x^2}$　　(2)　$-\dfrac{1}{1+x^2}$　　(3)　$\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{6}$ 解答　(1)　C は積分定数とする。

$$\int \sin^2 t\,dt=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t+C,\ \int \sin t\cos t\,dt=-\frac{1}{4}\cos 2t+C,$$

$$\int \cos^2 t\,dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

(2)　$f(x)=2\cos x$

$\boxed{7}$ 解答　(1)　$g'(x)=e^xf(x)+2e^xf'(x)$　　(2)　$f(x)=x^3+3x^2$

$\boxed{8}$ 解答　(1)　$f'(x)=4x\sin 2x+x\sin x$　　(2)　$\cos\alpha=-\dfrac{1}{8}$　　(3)　$-\pi$

$\boxed{1}$ C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 2x\,dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

(2) $\cos 3x\cos 5x = \dfrac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)$ であるから

$$\int \cos 3x \cos 5x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)dx = \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$\boxed{2}$ $\dfrac{5}{2x^2-7x+3} = \dfrac{5}{(2x-1)(x-3)}$

等式 $\dfrac{5}{(2x-1)(x-3)} = \dfrac{a}{2x-1} + \dfrac{b}{x-3}$ を満たす a，b の値を定めるため，分母を払って

整理すると　$5=(a+2b)x-(3a+b)$

よって　$0=a+2b$，$5=-(3a+b)$　　　これを解いて　$a=-2$，$b=1$

ゆえに $\displaystyle\int \frac{5}{2x^2-7x+3}dx = \int\left(\frac{-2}{2x-1} + \frac{1}{x-3}\right)dx = -\log|2x-1| + \log|x-3| + C$

$$= \log\left|\frac{x-3}{2x-1}\right| + C$$ （C は積分定数）

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx = \int x^2(-\cos x)'dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)dx$

$$= -x^2\cos x + 2\int x(\sin x)'dx = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right)$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$$ （C は積分定数）

$\boxed{4}$ $t=2-\sqrt{x}$ とおくと $dt = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}dx$　ゆえに　$dx = -2\sqrt{x}\,dt = -2(2-t)dt$ となる.

したがって　$\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2-\sqrt{x}}\,dx = -2\int_2^0 \sqrt{t}(2-t)dt = 2\int_0^2 \sqrt{t}(2-t)dt$

$$= 4\int_0^2 \sqrt{t}\,dt - 2\int_0^2 t^{\frac{3}{2}}dt = 4\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 - 2\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-0\right) - \frac{4}{5}\left(2^{\frac{5}{2}}-0\right) = \frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

$$= 16\sqrt{2}\left(\frac{5-3}{15}\right) = \frac{32}{15}\sqrt{2}$$

別解　$\sqrt{2-\sqrt{x}} = t$ とおくと $2-\sqrt{x} = t^2$　よって　$x=(2-t^2)^2$

また $dx = 2(2-t^2)(-2t)dt = 4(t^2-2)t\,dt$

したがって　(与式) $\displaystyle= \int_{\sqrt{2}}^0 t\times 4(t^2-2)t\,dt = -4\int_0^{\sqrt{2}}(t^4-2t^2)dt = -4\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}}$

$$= \frac{32}{15}\sqrt{2}$$

$\boxed{5}$ (1)　$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ であるから　　$\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(2)　(1) から

$$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}$$

(3)　(1)，(2) から

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

よって　　$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=C$　(C は定数)　…… ①

この等式で $x=1$ とおくと　　$2f(1)=C$

ゆえに　　$2\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=C$　…… ②

$t=\tan\theta$ とおくと　　$dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

t	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに，② から　　$C=\dfrac{\pi}{2}$

したがって，① から　　$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{6}$ (1)　C は積分定数とする。

$$\int \sin^2 t\,dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t + C$$

$$\int \sin t\cos t\,dt = \int \frac{\sin 2t}{2}dt = -\frac{1}{4}\cos 2t + C$$

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C$$

(2)　$f(x) = \cos x + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)(\cos t\cos x + \sin t\sin x)dt$

$$= \cos x + \frac{1}{\pi}\cos x\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt + \frac{1}{\pi}\sin x\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$$

ここで，$A = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt$，$B = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$とおくと

$$f(x) = (A+1)\cos x + B\sin x$$

よって，(1) の結果を用いると

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{(A+1)\cos^2 t + B\sin t\cos t\}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(A+1)\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi} + B\left[-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{A+1}{2}$$

$A = \dfrac{A+1}{2}$ を解いて　　$A = 1$

また　　$B = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\{(A+1)\sin t\cos t + B\sin^2 t\}dt$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(A+1)\left[-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^{\pi} + B\left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{B}{2}$$

$B = \dfrac{B}{2}$ を解いて　　$B = 0$

したがって　　$f(x) = 2\cos x$

$\boxed{7}$ (1)　$g(x)=e^x\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x e^t f'(t)\,dt$ であるから

$$g'(x)=e^x\int_0^x f'(t)\,dt+e^xf'(x)+e^xf'(x)=e^x\{f(x)-f(0)\}+2e^xf'(x)$$
$$=e^xf(x)+2e^xf'(x)$$

(2)　$e^xf(x)=-3x^2e^x+g(x)$ の両辺を微分して

$e^xf(x)+e^xf'(x)=-(3x^2+6x)e^x+e^xf(x)+2e^xf'(x)$ を得る。

これより $e^xf'(x)=(3x^2+6x)e^x$ であるから　$f'(x)=3x^2+6x$

よって　$f(x)=\int(3x^2+6x)dx=x^3+3x^2+C$　（C は積分定数）

ここで，条件 $f(0)=0$ から　$C=0$　　　よって　$f(x)=x^3+3x^2$

$\boxed{8}$ (1)　$x\sin x$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると　　$F'(x)=x\sin x$

よって　　$f(x)=\int_{-x}^{2x}F'(t)dt=\Big[F(t)\Big]_{-x}^{2x}=F(2x)-F(-x)$

ゆえに　　$f'(x)=2F'(2x)+F'(-x)=2\cdot 2x\sin 2x+(-x)\sin(-x)$
$$=4x\sin 2x+x\sin x$$

(2)　(1) から　　$f'(x)=8x\sin x\cos x+x\sin x=x\sin x(8\cos x+1)$

$0<x<\pi$ のとき，$f'(x)=0$ となる x の値は $\cos x=-\dfrac{1}{8}$ を満たし，$0<x<\pi$ にただ 1 つ存在する。

それを β とおくと，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ において $f(x)$ は $x=\beta$ で極大かつ最大となる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって　　$\cos\alpha=\cos\beta=-\dfrac{1}{8}$

(3)　$f(0)=\int_0^0 t\sin t\,dt=0$ であり

$$f(\pi)=\int_{-\pi}^{2\pi}t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t\Big]_{-\pi}^{2\pi}+\int_{-\pi}^{2\pi}\cos t\,dt=-2\pi+\pi+\Big[\sin t\Big]_{-\pi}^{2\pi}=-\pi$$

であるから，(2) の増減表より，求める $f(x)$ の最小値は　　$-\pi$