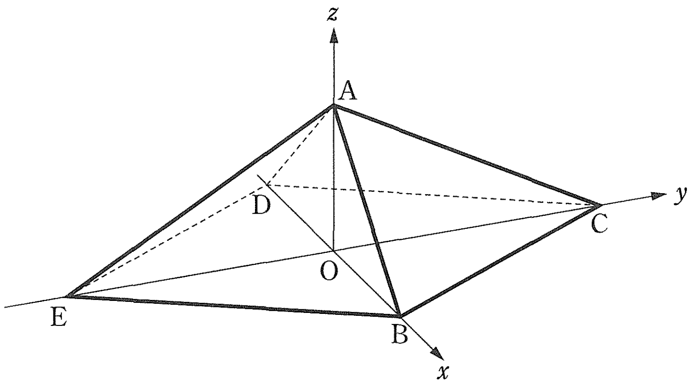
センター試験　名作セレクション
2009 本試験　数学ⅡＢ【４】

【１】<K000M74> 2009 年度　本試験　数学 II・B 第４問

(配点　20)　目安＝12 分

O を原点とする座標空間における 5 点を A(0，0，1)， B(1，0，0)， C(0，2，0)， D(−1，0，0)，E(0，−2，0) とする。ひし形 BCDE を底面とする四角錐(すい) A − BCDE と，平面 ABC に平行な平面との共通部分について考える。



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \boxed{\text{ア}}$ であり，三角形 ABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2)　$\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$， $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$ とおく。 $0 < a < 1$ とし， 点 $\mathrm{B_1}$ を線分 BE を $a : (1-a)$ に内分する点とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BB_1}} = \boxed{\text{エ}}\,\vec{v}$ である。点 $\mathrm{A_1}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{BB_1}}$$

で定め，線分 $\mathrm{A_1B_1}$ と線分 AE が交わることを示そう。 $\mathrm{A_1B_1}$ 上の点 P は， $0 \leqq b \leqq 1$ を満たす b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + b\vec{u} + \boxed{\text{エ}}\,\vec{v}$$

と表される。また， AE 上の点 Q は， $0 \leqq c \leqq 1$ を満たす c を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \boxed{\text{オ}}\,\vec{u} + (\boxed{\text{カ}} - c)\vec{v}$$

と表される。

P と Q は $b=$ $\boxed{\text{キ}}=\boxed{\text{クケ}}+1$ のとき一致するから，線分 A_1B_1 と AE は，AE を $\boxed{\text{コ}}:(1-\boxed{\text{コ}})$ に内分する点で交わることがわかる。この点を E_1 とする。

点 C_1 を

$$\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BB_1}$$

で定めると，同様に考えることにより，線分 A_1C_1 と線分 AD も，AD を $\boxed{\text{サ}}:(1-\boxed{\text{サ}})$ に内分する点で交わることがわかる。この点を D_1 とすると

$$\overrightarrow{D_1E_1}=\boxed{\text{シ}}\,\overrightarrow{DE}$$

であり，三角形 $A_1B_1C_1$ は三角形 ABC と平行であるから，四角形 $B_1C_1D_1E_1$ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\left(\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}^{\boxed{\text{チ}}}\right)$$

である。

また，

$$|\overrightarrow{B_1D_1}|=\sqrt{\boxed{\text{ツ}}\,a^2-\boxed{\text{テ}}\,a+\boxed{\text{ト}}}$$

である。

【解答１】<K000M74> 2009 年度　本試験　数学 II・B 第４問

(1)　ア，1　　$\dfrac{イ}{ウ}$，$\dfrac{3}{2}$

(2)　エ，a　　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+オ\vec{u}+(カ-c)\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\vec{u}+(1-c)\vec{v}$

キ＝クケ＋1，c＝−a＋1　　コ，a　　サ，シ，a，a

$\dfrac{ス}{セ}(ソ-タ^{チ})$，$\dfrac{3}{2}(1-a^2)$　　$\sqrt{ツa^2-テa+ト}$，$\sqrt{5a^2-2a+2}$

【解説１】<K000M74> 2009 年度　本試験　数学 II・B 第４問

空間ベクトル　(20 点)

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-1)\cdot(-1)=\boxed{1}\cdots(答)$$

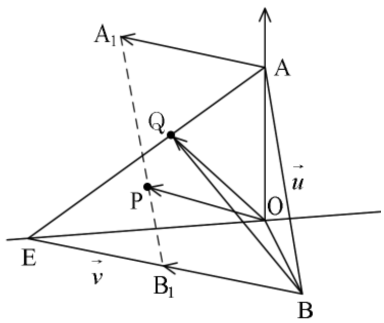
また，三角形 ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}})^2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{2}$，　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$ であるから，

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot5-1^2}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\cdots(答)$$

(2)　$\mathrm{B_1}$ は BE を $a:(1-a)$ に内分するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{BB_1}}=a\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\boxed{a}\vec{v}\cdots(答)$$



次に，右図のように A から $\overrightarrow{\mathrm{BB_1}}$ と等しいベクトルをおくと，終点が $\mathrm{A_1}$ となる。

よって，　$\mathrm{AA_1B_1B}$ は平行四辺形になるので，　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{B_1A_1}}$ となる。

ここで，　$\overrightarrow{\mathrm{B_1P}}=b\overrightarrow{\mathrm{B_1A_1}}=b\overrightarrow{\mathrm{BA}}=b\vec{u}$ $(0\leqq b\leqq1)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BB_1}}+\overrightarrow{\mathrm{B_1P}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+a\vec{v}+b\overrightarrow{\mathrm{B_1A_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b\vec{u}+a\vec{v}$$

同様に，　AE 上の点を Q とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$$

点 Q は線分 AE 上の点なので，　$0\leqq c\leqq1$ を満たす c を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=c\vec{u}+(1-c)\vec{v}$$

と書ける。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\boxed{c}\vec{u}+(\boxed{1}-c)\vec{v}\cdots(答)$$

P と Q が一致するには，　$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の係数を比較して，

$$\begin{cases}b=c\\a=1-c\end{cases}\Leftrightarrow\quad b=\boxed{c}=\boxed{-a}+1\cdots(答)$$

となる必要がある。

このとき，Q は AE を $(1-c):c$ に内分しているので，　$c=-a+1$ より

$$(1-c):c\quad\Leftrightarrow\quad\boxed{a}:(1-a)\cdots(答)$$

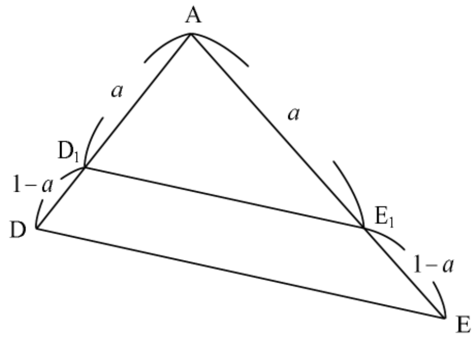
のとき一致することがわかる。

同様の考察より，　$\mathrm{A_1C_1}$ と AD も AD を

$$\boxed{a}:(1-a)\cdots(答)$$

に内分することがわかる。

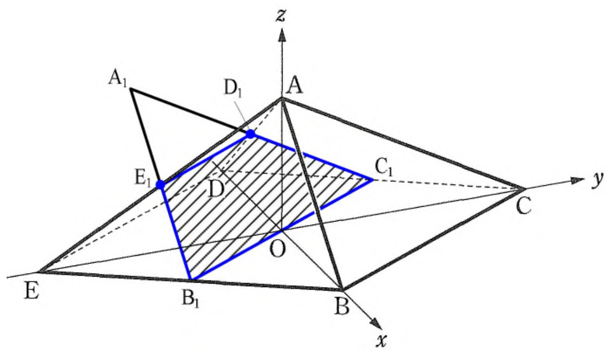
よって，△ADE を考えると次図のようになっているので，



$\triangle AD_1E_1 \backsim \triangle ADE$ であり，また相似比が $a:1$ となることから，

$$\overrightarrow{D_1E_1} = \boxed{a}\,\overrightarrow{DE} \cdots(\text{答})$$

次に，$\triangle A_1B_1C_1$ は次図のように△ABC を平行に移動させたものになると考えられる。



また，$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{C_1B_1}$ となることから，

$\overrightarrow{D_1E_1} = a\overrightarrow{DE} = a\overrightarrow{C_1B_1}$ より $\triangle A_1D_1E_1 \backsim \triangle A_1B_1C_1$ となり，

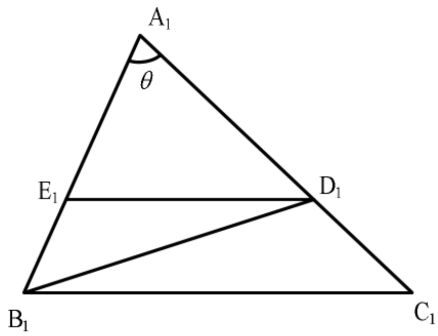
相似比は $a:1$，面積比は $a^2:1$ となる。

よって，求める四角形の面積は，$\triangle ABC = \dfrac{3}{2}$ より

$$B_1C_1D_1E_1 = \triangle A_1B_1C_1 - \triangle A_1D_1E_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a^2$$

$$= \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}\left(\boxed{1} - \boxed{a}^{\boxed{2}}\right) \cdots(\text{答})$$

さらに，$\angle B_1A_1C_1 = \theta$ として，$\triangle A_1B_1C_1$ について余弦定理を用いると，



$$A_1C_1 = B_1C_1 = \sqrt{5},\quad A_1B_1 = \sqrt{2}$$

なので，

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

次に，$\triangle A_1B_1D_1$ に余弦定理を用いて，$A_1D_1 = \sqrt{5}a$ より

$$B_1D_1{}^2 = A_1D_1{}^2 + A_1B_1{}^2 - 2A_1D_1\cdot A_1B_1\cos\theta$$

$$= (\sqrt{5}a)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot\sqrt{5}a\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= 5a^2 - 2a + 2$$

よって，

$$|\overrightarrow{B_1D_1}| = \sqrt{\boxed{5}a^2 - \boxed{2}a + \boxed{2}} \cdots(\text{答})$$