テーマ別　確率

《基礎チェック問題》

1. 男子4人，女子6人の計10人を1列に並べるとき，両端が男子となる確率は$\boxed{}$，両端で性別が異なる確率は$\boxed{}$である．（00　松山大・法）

2. 男子4人，女子4人が一列に交互に並ぶとき，特定の男子1人と特定の女子1人が隣り合う確率を求めよ．（00　酪農学園大・酪農，環境システム）

3. 10本のくじの中に，当たりくじが3本入っている．このくじを3人が順番に1本ずつ引くが，引いたくじはもとに戻さないとする．2番目に引く人が当たる確率は$\boxed{(1)}$であり，3番目に引く人が当たる確率は$\boxed{(2)}$である．3人のうち1人だけが当たりくじを引く確率は$\boxed{(3)}$である．（(1)(2)…00　東京経済大・経済；(3)…類　00　流通経済大）

4. 袋の中に全く同様な10個の球が入っている．その中の2個は黒，3個は白，5個は青である．今，袋の中をよくかきまぜて3個の球を同時に取り出すとき，取り出した球の色がすべて青である確率は$\boxed{}$であり，取り出した球の色が少なくとも2種類である確率は$\boxed{}$である．（類　00　明星大・情報）

5. 0から9までの整数の中から異なる4個を用いて，左先頭に0がこないようにして4けたの自然数をつくる．このようにしてつくられる異なる4けたの自然数が同様に等しく現れるとき，この数が5の倍数になる確率は$\boxed{}$である．（類　00　山梨学院大）

6. 1から9までの番号がついたカード9枚から同時に3枚を抜き出すとき，3つの番号の和が3で割り切れる確率は$\boxed{}$である．（00　関西大・工）

7. 2個のさいころを投げるとき，同じ目の出る確率は$\boxed{}$であり，出た目の積が3の倍数になる確率は$\boxed{}$である．（00　国士舘大）

8. 1個のサイコロを3回振るとき，すべて同じ目が出る確率は$\boxed{(1)}$であり，ちょうど2回同じ目が出る確率は$\boxed{(2)}$である．また，出る目が振った順に大きくなる確率は$\boxed{(3)}$であり，出る目の積が12になる確率は$\boxed{(4)}$である．（(1)〜(3)…00　千葉工大；(4)…00　倉敷芸術科学大）

9. 3つのさいころを同時に振るとき，出る目の数の最大値が4になる確率を求めよ．（00　東京水産大）

10. 1枚のコインを5回続けて投げる．このとき，表が3回でる確率は$\boxed{}$であり，表が続けて3回以上でる確率は$\boxed{}$である．（00　東京経済大・経営）

11. x軸上を動く点が，原点を出発して，さいころをふって奇数の目が出たときには$+2$だけ進み，偶数の目が出たときには-1だけ進むものとする．さいころを6回ふった後，点が$x=3$にくる確率を求めよ．また，さいころを6回ふった後，点がくる位置のx座標の期待値を求めよ．（00　岡山理科大・理）

12. AとBが試合をして，先に3勝した方が優勝とする．AがBに勝つ確率を$\dfrac{2}{3}$とするとき，Aが優勝する確率は$\boxed{}$である．ただし，引き分けはないものとする．（00　中部大・工）

13. A，B，Cの3人がじゃんけんを1回するとき，Bだけが勝つ確率は$\boxed{(1)}$である．また，誰も勝たない確率は$\boxed{(2)}$である．次に，勝者1人が決まるまで，じゃんけんを繰り返すとき，Aが2回目で優勝する確率は$\boxed{(3)}$である．（(1)(2)…00　武蔵大；(3)…98　九州産業大・経，一部略）

《基礎チェック問題・解答》

1．確率で「同様に確からしい」を間違えると致命傷．

すべてのものを区別した順列は同様に確からしい…Ⓐが確率の出発点です．

人はすべて区別しますから，全部で 10! 通り ……①の並べ方があって，これらは同様に確からしい．

・**両端が男子**：　①のうち，両端が男子であるのは，その両端の男子の並べ方が 4×3 通り，残り 8 人 の並べ方が 8! 通りあるから，4×3×8! 通りの並べ方がある．

よって両端が男子の確率は，$\dfrac{4\times3\times8!}{10!}=\dfrac{4\times3}{10\times9}=\mathbf{\dfrac{2}{15}}$

[**別解**…両端の 2 人の並べ方だけを考えて（それ以外は並べなくても確率に影響しない）解くこともできます]

両端の 2 人の並べ方は，10×9 通り ………………②あり，そのうち 2 人とも男子であるのは，4×3 通りであるから，両端が男子となる確率は，$\dfrac{4\times3}{10\times9}=\mathbf{\dfrac{2}{15}}$

➯**注**　②のどの 1 通りについても，それぞれ①の順列が 8! 通りずつ（残りの 8 人の並べ方）あるので，①が同様に確からしいなら，②も同様に確からしい．

・**両端で性別が異なる**：　[上の別解と同様に]

②のうち，性別が異なる並べ方は，まず両端の男女の選び方が 4×6 通りで，その男子がどちらの端に並ぶかで 2 通りあるから，4×6×2 通りである．

よって，両端で性別が異なる確率は，$\dfrac{4\times6\times2}{10\times9}=\mathbf{\dfrac{8}{15}}$

2．前問と違い，男女が交互に並ぶのが前提なので，8 人が 1 列に並ぶ方法 8! 通りを分母にすることはできません．男女が交互に並ぶとき，男が左端か女が左端かで 2 つの場合がありますが，本問の確率を求めるには，右のように男が左端としてよく，

男が左端として，男女が交互に並ぶ方法の総数……①を分母にしましょう．①は，男子 4 人の並べ方と女子 4 人の並べ方から，4!×4! 通り．このうち，特定の男女 1 人ずつが隣り合うのは，その 2 人が上図の ⌢ か ⌣ の 7 か所のうちいずれかに並ぶときで，残りの男子 3 人，女子 3 人の並べ方を考えて，7×3!×3! 通り．

よって答えは，$\dfrac{7\times3!\times3!}{4!\times4!}=\dfrac{7}{4\times4}=\mathbf{\dfrac{7}{16}}$

[**別解**]　前問の別解と同様に，特定の男子 1 人と特定の女子 1 人の並べ方だけを考えて解くこともできます．

上図のように男女の座席が決まっているとき，特定の男子 1 人と特定の女子 1 人の座り方は，4×4=16 通り．

そのうち，この 2 人が隣り合うのは，男子が左端に座る場合は 1 通り，それ以外の 3 か所に座る場合は 2 通りずつ女子の座り方があるから，全部で 1+3×2=7 通り．

よって，特定の男女が隣り合う確率は $\mathbf{\dfrac{7}{16}}$

3．くじびきの問題です．無意識のうちに“積の法則”と“和の法則”を使って，例えば(1)を次のように解く人が少なからずいます．

(1)　1 番目の人が，当たりかはずれかで場合分けして

$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3\times(2+7)}{10\times9}=\mathbf{\frac{3}{10}}$$

この方針だと，(2)は面倒です．原則に戻って考えましょう．A，B，C の 3 人がこの順に引くものとします．

(2)　10 本のくじをすべて区別すると，3 人のくじの順列は，10×9×8 通り……①．そのうち C が当たりである順列は，まず C の引き方から考えると，C が当たり 3 本のうちのどれを引くかで 3 通り，A，B が残り 9 本から 2 本引く方法が 9×8 通りあるから，3×9×8 通り．

よって C が当たる確率は，$\dfrac{3\times9\times8}{10\times9\times8}=\mathbf{\dfrac{3}{10}}$（B も同じ）

➯**注**　～～がポイントです（順列はどのような順序で考えてもよい）．**何番目に引いても，当たる確率は同じ**，が分かります．そもそも次のように解けます．

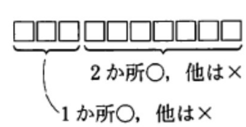
[**別解**]　C が 10 本のうちどのくじを引くかは対等なので，C が当たりくじを引く確率は $\mathbf{\dfrac{3}{10}}$（B も同じ）　//

と一発です．このように**対等性に着目するのも重要**です．

(3)　①のうち，1 人だけ当たりくじを引く順列は，まずだれが当たりを引くかで 3 通りあり，3 本の当たりくじから 1 本，7 本のはずれくじから 2 本を引く方法はそれぞれ 3 通り，7×6 通りだから，3×3×7×6 通り．

よって求める確率は，$\dfrac{3\times3\times7\times6}{10\times9\times8}=\mathbf{\dfrac{21}{40}}$

[**別解**]　当たりを○，はずれを×として，3 個の○，7 個の×を 1 列に並べたものを左から順に取るとしてよく，このような考え方も重要です．この○と×の並べ方は，10 か所のうちどの 3 か所に○を配置するかで決まり，$_{10}C_3$ 通りある．このうち，3 人のうち 1 人だけ当たるのは，右図により，



$$\frac{{}_3C_1\times{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\mathbf{\frac{21}{40}}$$

4. 「同時に」という表現は，取り出した3個の球の組合せだけを問題にするときに使われる表現で，「3個の球を1個ずつ取り出したとき，その3球の組合せを考える．ただし取り出した球はもとに戻さない．」と同じことです．取り出した球を「もとに戻さない」タイプをくじ引き型とよぶことにすると，

くじ引き型は，組合せも同様に確からしい

ので，組合せを分母にすることができます．ただし，分母や分子の場合の数を数える際は，同色のものでも区別しなければなりません．

本問の場合，b_1，b_2；W_1，W_2，W_3；B_1，B_2，…，B_5 の10個から3個を取り出す組合せは ${}_{10}C_3=120$ 通りあり，これらは同様に確からしい．

このうち3個とも青球であるのは，B_1～B_5 から3個を取り出す ${}_5C_3=10$ 通りだから，その確率は $\dfrac{10}{120}=\mathbf{\dfrac{1}{12}}$

次に，「球の色が少なくとも2種類」となる確率ですが，“少なくとも”とあるので余事象を考えます．余事象は「1種類だけ」で，白のみと青のみがあります．青のみは上で求めていて，白のみの確率は，$\dfrac{{}_3C_3}{120}=\dfrac{1}{120}$

よって，答えは $1-\left(\dfrac{10}{120}+\dfrac{1}{120}\right)=\mathbf{\dfrac{109}{120}}$

5. 「5の倍数 ⇄ 一の位が0または5」です．よって一の位に着目すればよいのですが，一の位に0～9の数字が対等に現れるわけではないことに注意．最高位（千の位）が0にはなれないことが影響するのです．そこで，千の位と一の位の2つの数字の並び方を考える必要がありますが，この2つの並べ方だけを考えればO.K.です．

千の位と一の位の2数の並べ方は，千の位は0以外であることに注意して，全部で9×9通りある．そのうち，一の位が0となるのは9通りで，5となるのは8通りであるから，求める確率は，$\dfrac{9+8}{9\times9}=\mathbf{\dfrac{17}{81}}$

6. 4番と同様に，組合せを分母にすることができます．

9枚のカードを3で割った余りで分類します．

A グループ……3，6，9（≡0（mod3））
B グループ……1，4，7（≡1（mod3））
C グループ……2，5，8（≡2（mod3））

3枚取り出したとき，その3数の和が3の倍数であるのは，Aから3枚；Bから3枚；Cから3枚；A，B，Cから1枚ずつ取り出す場合のいずれかであるから，

$$\frac{{}_3C_3\times3+{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_9C_3}=\frac{3+27}{84}=\mathbf{\frac{5}{14}}$$

7. サイコロをふるとは，1～6の6本のくじから1本引くのと同じですが，2回ふるとき，1回目のくじを戻してから2回目のくじを引くことになります．

サイコロは，戻すくじ引きに言い換えられる典型なので，このタイプをサイコロ型と呼ぶことにしましょう．

サイコロ型では，たとえ組合せが問題になっているときでも順列で考えないと同様に確からしいが言えません．

例えばサイコロを2回ふるとき，次の組合せを考えると

{1，2}…順列12と21を2つ合わせたもの
{1，1}…順列11の1つのみ

で，{1，1}という組合せよりも{1，2}のほうが2倍出やすいから，同様に確からしいが言えないわけです．

サイコロを2個ふるとき，分母は出る目の順列 a-b の個数 6^2（これらは同様に確からしい）にします．

前半：　$a=b$ となるのは，a の6通りの目の出方に対して b は1通りであるから，その確率は $\dfrac{6\times1}{6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

後半：　目の出方は，全部で $6^2=36$ 通りしかなく，右のような表で整理するのが手早いでしょう．出た目の積が3の倍数になるものに○を書くと右のようになるから，答えは，$\dfrac{6\times4-4}{36}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$

a \ b	1	2	3	4	5	6
1			○			○
2			○			○
3	○	○	○	○	○	○
4			○			○
5			○			○
6	○	○	○	○	○	○

8. サイコロを3回ふるとき，分母は出る目の順列 a-b-c の個数 6^3（これらは同様に確からしい）にします．

(1)　$a=b=c$ となる確率は，$\dfrac{6\times1\times1}{6^3}=\mathbf{\dfrac{1}{36}}$

(2)　ちょうど2回同じ目が出るのは，a，b，c のうちのどの2個が同じかで ${}_3C_2$ 通りあり，その目の出方は6通り，残りの目の出方は5通りであるから，全部で ${}_3C_2\times6\times5$ 通り．よって答えは，$\dfrac{{}_3C_2\times6\times5}{6^3}=\mathbf{\dfrac{5}{12}}$

(3)　$a<b<c$ となる順列は，1以上6以下の自然数から異なる3つを選んで小さい順に a，b，c とすることで得られるから，その個数は ${}_6C_3=20$ 通り．よって

$a<b<c$ となる確率は，$\dfrac{20}{6^3}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{54}}$ です．あるいは，

出る目がすべて異なる確率 $\dfrac{6\times5\times4}{6^3}=\dfrac{5}{9}$ の $\dfrac{1}{6}$

（なぜなら，$a<b<c$ となる順列……㋐ に対し，a，b，c を並べ替えると，出る目がすべて異なる順列……㋑ が得られ，この並べ替えの総数は $3!=6$ 通りだから，㋑の個数は㋐の 6 倍）として求めてもよいでしょう．

（4） $abc=12$ となる 3 数 a，b，c の組合せは，

1° {1，2，6}　2° {1，3，4}　3° {2，2，3}

であり，1°，2° に対応する順列は $3!=6$ 通り，3° に対応する順列は 3 通りであるから，求める確率は，

$$\frac{6\times2+3}{6^3}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{72}}$$

9．**出る目の最大値が 4 となる確率**

＝最大値が 4 以下の確率－最大値が 3 以下の確率

と考えます．最大値が〜以下の確率が求め易いからです．

最大値が 4 以下 ⇄ 全部 4 以下の目が出る

などと言い換えて，答えは $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3-\left(\dfrac{3}{6}\right)^3=\dfrac{\mathbf{37}}{\mathbf{216}}$

10．1 回の試行では確率 p で起こる事象 A を考えます．この試行を n 回繰り返すとき，A が r 回起こるのは，n 回のうちのどの r 回で A が起こるかで ${}_n\mathrm{C}_r$ 通りあるので，A が r 回起こる確率は ${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$ ………Ⓐ

です．よって，コインを 5 回投げるとき，表が 3 回出る確率は，${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{10}{2^5}=\dfrac{5}{2^4}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}$

次に，表が続けて 3 回以上出る確率についてです．

どこかである状態になるという場合は（いまの場合，はじめて表が 3 連続して出る 3 回目），**どこではじめてそういう状態になるか，でタイプ分けするの**が，もれなくダブりがないうまい場合分けです．

表を○，裏を×，△は何でもよいとすると，右のタイプがあるので，全部で，$2^2+2+2=8$ 通り．

○ ○ ○ △ △
× ○ ○ ○ △
△ × ○ ○ ○

よって表が続けて 3 回以上出る確率は，$\dfrac{8}{2^5}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

11．奇数の目が出る確率と偶数の目が出る確率は，ともに $\dfrac{1}{2}$ です．奇数が n 回，偶数が $6-n$ 回出るとき，動点の x 座標は $2n-(6-n)=3n-6$ となります．これが 3 になるのは，$n=3$ のときで，このようになる確率は前問のⒶにより，${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{20}{2^6}=\dfrac{5}{2^4}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}}$

動点の x 座標が $3n-6$ になる確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_n}{2^6}$ （$n=0$〜6）

ですから，求める期待値は，

$$(-6)\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_0}{2^6}+(-3)\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_1}{2^6}+0\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{2^6}+3\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{2^6}$$
$$+6\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{2^6}+9\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_5}{2^6}+12\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_6}{2^6}$$
$$=\frac{-6-18+60+90+54+12}{2^6}=\frac{192}{64}=\mathbf{3}$$

⇨注　サイコロを 1 回ふるとき，動点の移動量（＝動点の x 座標）の期待値は，$2\times\dfrac{1}{2}+(-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

同じことを n 回行うときの期待値は，1 回行うときの期待値の n 倍になるという定理があります（数 B の

12．A が優勝する場合の A の勝敗は，右のようになることから（勝ち数はいつも 3），

$$\text{○○○}$$
$$\underbrace{\text{△△△}}_{1\text{回●}}\text{○}$$
$$\underbrace{\text{△△△△}}_{2\text{回●●}}\text{○}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$+{}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1+3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{9}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{8}{3}=\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{81}}$$

［別解］ 5 回以下の対戦で，どちらが優勝するか決まります．5 回より少ない回数で優勝しても，5 回対戦するとして考えてもよく（優勝が決まった後に戦い続けても，それ以前の対戦結果に影響しないから），このようにすると次のように言い換えられます（5 回必ず戦うので，分母がすべて 3^5 になり，通分する手間が省けます）．

A が先に 3 勝する

⇄ **5 回戦うことにして，A が 3 勝以上する**

この確率は，

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{2}{3}\right)^5$$
$$=\frac{10\times8+5\times16+32}{3^5}=\frac{192}{3^5}=\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{81}}$$

13. ジャンケンはサイコロ型です．3人がジャンケンを1回行うとき，分母は 3^3（通り）です．

(1) ジャンケンを1回するとき，Bだけが勝つのは，Bの3通りの手の出し方に対して，A，Cは1通りずつであるから，その確率は，$\dfrac{3\times1^2}{3^3}=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$ ………………①

(2) 誰も勝たない，つまりあいこになる場合は，

1° 3人とも同じ手……3通り

2° 3人とも異なる手……3! 通り

であるから，その確率は，$\dfrac{3+3!}{3^3}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$ ………………②

(3) 2回目でAだけが勝つ場合を，樹形図で書くと，

$$\begin{tikzcd} & \text{3人} \arrow[r, "㋑"] & \text{A} \\ \text{3人} \arrow[ur, "㋐"] \arrow[dr, "㋒"'] & & \\ & \text{2人（Aを含む）} \arrow[r, "㋓"] & \text{A} \end{tikzcd}$$

となります．

㋐となる確率は②，㋑となる確率は①に等しい．

㋒となる確率は，Aと同じ手を出すのがB or Cの2通りあることを考慮して，$\dfrac{3\times2}{3^3}=\dfrac{2}{9}$

㋓は，Aの相手の出し方が1通りだから，$\dfrac{3\times1}{3^2}=\dfrac{1}{3}$

よって，Aが2回目で優勝する確率は，㋐×㋑＋㋒×㋓（積の法則と加法定理）により，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{1}{9}}$

《標準問題》

1 4個のサイコロを同時に投げるとき，出た目すべての積が奇数になる確率は $\boxed{}$ である．また，出た目すべての積が4で割り切れる確率は $\boxed{}$ である．

（00　福岡大・文系）

2 A君を含めた4人で，1回だけじゃんけんをする．

（1） パーを出した者が勝者で，その勝者数が1人，2人，3人である確率をそれぞれ求めよ．

（2） あいこにならずに勝負が決まる確率を求めよ．また，A君が勝者に含まれる確率を求めよ．

（3） このじゃんけんにおける勝者の人数の期待値を求めよ．　（00　福井大・工）

3 5つのサイコロを同時に投げるとき，出た目の数の最大値が4で，最小値が2である確率を求めよ．

（00　福山大・工，人間文化）

4 ジョーカーを除く52枚のトランプがある．

（1） 52枚のトランプを一列に並べるとき，ハートのクイーンおよびハートのキングが隣り合わせになる確率を求めよ．

（2） 同様に一列に並べるとき，ハートのクイーンおよびハートのキング，スペードのクイーンおよびスペードのキングのうち，少なくとも1組が隣り合わせになる確率を求めよ．

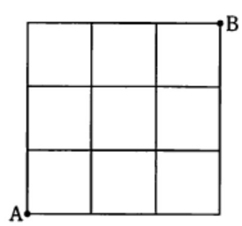
（3） こんどは，円形に並べるとき，ハートのクイーンおよびハートのキング，スペードのクイーンおよびスペードのキングのうち，少なくとも1組が隣り合わせになる確率を求めよ．　（00　名古屋経済大）

5 複素数 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について，

（1） ω の極形式および ω^{14} の値を求めよ．

（2） 複素数平面上の複素数 z（$\neq 0$）に対し，次の操作を行う．コインを投げて，表が出たら z を $z\omega$ に移し，裏が出たら z を $z\omega^2$ に移す．z に対しこの操作を5回繰り返したとき，z が自分自身に移る確率 P を求めよ．　（00　東京農工大・工）

6 図のような正方形の街路がある．



x はA地点からB地点へ，y はB地点からA地点へ，それぞれ同じ速さで同時に出発したとき，途中で出会う確率は $\boxed{}$ である．ただし，x と y は最短の道すじを進み，分岐点で進行方向を複数選べるときは等確率でどれか1つを選ぶものとする．　（類　00　横浜商科大）

$\boxed{7}$ 1つのさいころをn回投げる試行において，出た目がすべて奇数で，かつ1の目がちょうどk回($0 \leqq k \leqq n$)出る確率をp_kとする.

(1) $n=3$のとき，p_1を求めよ.

(2) p_k ($0 \leqq k \leqq n$)をnとkの式で表せ．また，出た目がすべて奇数で，かつ1の目が少なくとも1回出る確率qを求めよ.

(3) $n=3m+2$ (mは自然数)とする．$0 \leqq k \leqq n-1$のとき，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leqq 1$となる$k$の範囲を求めよ．さらに，$0 \leqq k \leqq n$のとき，$p_k$が最大となる$k$を求めよ.

(00　広島大・理系)

$\boxed{8}$ 四面体OABCの頂点を移動する点Pがある．点Pは一つの頂点に達してから1秒後に，他の三つの頂点のいずれかに各々確率$\dfrac{1}{3}$で移動する．頂点Oにいた点Pがそれからn秒後に頂点Aにいる確率をp_nとする.

(1) p_{n+1}をp_nを用いて表せ.

(2) p_nを求めよ.　(00　工学院大)

$\boxed{9}$ A，Bの2チームが続けて試合をして，先に4勝したチームを優勝とする．引き分けはなく1勝ごとに勝つ確率はともに$\dfrac{1}{2}$であると仮定する．すでに，Aチームが第1，2戦に連勝している.

(1) Aチームが優勝する確率を求めよ.

(2) どちらかが優勝するまでの試合数の期待値を求めよ.　(00　姫路工大)

$\boxed{10}$ 自然数nに対し$A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$，$B=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2n\}$とする．集合Aから1つの数を選び，また同時に集合Bからも1つの数を選ぶ．この選んだ2つの数のうち小さくない方の数をXと書くことにする．ただし，集合Aから選ばれる確率はどの数も等しいとし，集合Bについても同様とする.

(1) kを$2n$以下の自然数とするとき，$X=k$となる確率p_kを求めよ.

(2) Xの平均$E(X)$を求めよ．ただし，

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$である.

(00　山梨大・教育人間科学)

《標準問題・解答》

$\boxed{1}$ 後半は，まともに考えると「積が4で割り切れる」$\Longleftrightarrow$「4が1個以上 or 偶数が2個以上」となりますが，これではダブりが生じてうまくいきません．ところが，「積が，素因数として2を2個以上持つ」と言いかえると「素因数として2を0，1個持つ以外」なので，余事象の利用に結びつきやすくなります．

解 4個のサイコロの出た目をa，b，c，dとし，積をPとおく．

前半：Pが奇数$\Longleftrightarrow a$，b，c，dすべて奇数で，a, b, c, dそれぞれが奇数になる確率はどれも$\dfrac{1}{2}$だから，Pが奇数になる確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\mathbf{\dfrac{1}{16}}$ ………①

後半：まずPが4で割り切れない確率を求める．

Pを，$P=2^qR$（qは0以上の整数でRは奇数）と表したとき，Pが4で割り切れない$\Longleftrightarrow q=0$，1

1° $q=0$となるのは，Pが奇数のときだから，このときの確率は①.

2° $q=1$となるのは，a，b，c，dのうちどれか1個が2，6のいずれかで，残り3個が奇数のとき．どれが2か6になるかで4通りあり，サイコロの出た目が2か6になる確率は$\dfrac{1}{3}$，奇数になる確率が$\dfrac{1}{2}$だから，$q=1$となる確率は，$4\times\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{4}{3\cdot 2^3}$

Pが4で割り切れるのは，1°，2°以外だから，求める確率は$1-\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{4}{3\cdot 2^3}=1-\dfrac{3+8}{48}=\mathbf{\dfrac{37}{48}}$

$\boxed{2}$ （1） 4人でじゃんけんしたときの手の出方3^4通りのうち，k人がパーで勝者になるのは${}_4C_k$通りです．

（2） （1）からパーが勝者のときが何通りあるか分かりますが，グー・チョキのときも考えるとそれを3倍すればいいですね．

（3） ここでも（1）が使えます．

解 4人のじゃんけんでは，出し方は全部で3^4通り．

（1） パーを出したk人だけが勝者になるのは，パーになるのが4人中どのk人か（残りの$4-k$人はグー）で${}_4C_k$通りだから，求める確率は，順に

$$\frac{{}_4C_1}{3^4}=\mathbf{\frac{4}{81}},\ \frac{{}_4C_2}{3^4}=\mathbf{\frac{2}{27}},\ \frac{{}_4C_3}{3^4}=\mathbf{\frac{4}{81}}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

（2） （1）より，パーが勝者で勝負が決まるのは，${}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3=14$通り．グー・チョキが勝者のときも同数あるから，勝負が決まる確率は，$\dfrac{14}{3^4}\times 3=\mathbf{\dfrac{14}{27}}$

また，A君が勝者のときを考えると，パーで1人，2人，3人が勝者になるとき，A君以外の3人から勝者を0人，1人，2人決めればよいのだから，${}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2=7$通り．グー・チョキのときも同数あるから，A君が勝者に含まれる確率は，$\dfrac{7}{3^4}\times 3=\mathbf{\dfrac{7}{27}}$ …………………………②

（3） じゃんけんの勝者は1人，2人，3人のいずれかで，グー・チョキで勝つことも考えると，勝者が1人，2人，3人である確率は，順に①を3倍したもの．

よって，4人のじゃんけんの勝者の期待値は

$$1\times\frac{4\times 3}{81}+2\times\frac{2\times 3}{27}+3\times\frac{4\times 3}{81}=\frac{4+12+12}{27}=\mathbf{\frac{28}{27}}$$

⇨注 （3） 「和の期待値は期待値の和」（☞p.27）を使うと，‘②×4’で求まります．

$\boxed{3}$ 出る順番はまずは無視して，出た目の数を$2\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 4$としたときの（$a$，$b$，$c$）の組を求め，それらに対し，それぞれ何通りが対応するかを考えます．

解 サイコロの出方は全部で6^5通り．

サイコロを5回投げて出た目の数を小さい順に並べて，

$2\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 4$ ………………………………………①

となったとする．①をみたす（a，b，c）の組は，

$(a, b, c)=(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 4, 4), (4, 4, 4)$

サイコロを5回投げて，2がp回，3がq回，4が$5-p-q$回出るのは，まず5個から2をp個選び，残った$5-p$個から3をq個選ぶと考えて，${}_5C_p\cdot{}_{5-p}C_q$通りある．

よって，上記の（a，b，c）の組に対し，サイコロの投げ方は，順に5，${}_5C_3\cdot 2$，${}_5C_3$，${}_5C_2\cdot 3$，${}_5C_2\cdot 3$，${}_5C_2$，$5\cdot 4$，$5\cdot{}_4C_2$，$5\cdot 4$，5……② 通り対応する．

よって，求める確率は，$\dfrac{②の和}{6^5}=\mathbf{\dfrac{5}{216}}$

$\boxed{4}$ 隣り合うカードはかたまりと見なせます．

（2）（3）で，「少なくとも1組」とありますが，ベン図をかけば，重複部分（どちらも隣り合っている確率）を引けばよいことに気付くでしょう．また，「‘少なくとも’だから余事象で」だとかえってやっかいです（☞注）.

（3） まずはどれか1枚を固定して考えますが，モンダイになっている4枚のどれかを固定するとメンドウなので関係ないカードを固定します．

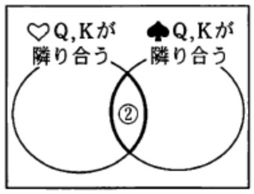
解 クイーンをQ，キングをKと書く．

（1） 52枚を一列に並べるとき，♡Q，♡Kをどこに置くかは$52\cdot 51$通りあり，これらは同様に確からしい．

このうち，♡Q，♡Kが隣り合うのは，♡Q♡Kおよび♡K♡Qとなるものがそれぞれ51通りあるから，♡Q，♡Kが隣り合わせになる確率は，$\dfrac{2\cdot 51}{52\cdot 51}=\mathbf{\dfrac{1}{26}}$ ……①

【別解】☆ 52 ヶ所のうちどの 2 ヶ所に ♡K と ♡Q がくるかで ${}_{52}C_2$ 通りで，これらは同様に確からしい．このうち，♡K と ♡Q が隣り合うのは 51 通りだから（以下略）

（2） ♡Q，♡K，♠Q，♠K をどこに置くかは，（1）と同じく 52･51･50･49 通りあり，これらは同様に確からしい．♡Q，♡K および ♠Q，♠K が隣り合う確率はともに①だから，②を図の部分とすると，求める確率は，①×2－②



②，つまり，♡Q，♡K と ♠Q，♠K がそれぞれ隣り合っているのは，♡Q，♡K と ♠Q，♠K をそれぞれかたまりとして 50 枚のカードを並べるとすると 50･49 通りで，Q と K の並び方で 2 通りずつあるから，$50\cdot49\times2^2$ 通り．

これより，$②=\dfrac{50\cdot49\times2^2}{52\cdot51\cdot50\cdot49}=\dfrac{1}{13\cdot51}$ となるから，

求める確率は

$$①\times2-②=\frac{1}{26}\times2-\frac{1}{13\cdot51}=\frac{1}{13}-\frac{1}{13\cdot51}$$
$$=\frac{51-1}{13\cdot51}=\mathbf{\frac{50}{663}}$$

（3） ♠ のエースを固定する．他のカードの並べ方は 51! 通り．ここで，

・♡Q，♡K が隣り合う確率 ……………………………③

・♡Q，♡K と ♠Q，♠K がそれぞれ隣り合う確率…④

とおくと，求める確率は，（2）と同じく③×2－④

ここで，③，④は（2）と同様に考えると，

$$③=\frac{50!\times2}{51!}=\frac{2}{51},\quad ④=\frac{49!\times2^2}{51!}=\frac{2}{25\cdot51}$$

だから，$③\times2-④=\dfrac{2}{51}\times2-\dfrac{2}{25\cdot51}=\mathbf{\dfrac{98}{1275}}$

⇨注 （2）（3）で余事象を考えると「♡Q，♡K が隣り合わない，かつ ♠Q，♠K が隣り合わない確率」を求めることになりますが，これら 4 枚の位置関係により状況が変わりメンドウ．

5 （2） 要するにコインを投げるごとに±120°回転するわけです．$\omega^3=1$ も利用して，まずは「自分自身に戻るのは，表が何回出るときか」を決定しましょう．

解 （1） $\omega=\cos120°+i\sin120°$ より $\omega^3=1$ …①

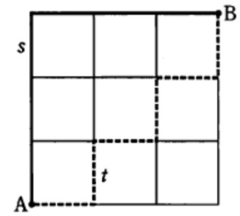
よって，$\omega^{14}=\omega^{3\times4}\cdot\omega^2=\omega^2=\overline{\omega}=\mathbf{\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}}$

（∵ ①）

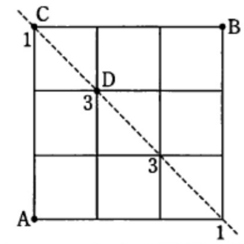
（2） コインを 5 回投げて表が k 回（裏が $5-k$ 回）出たとすると，5 回投げた後の z は $z\omega^k\omega^{2(5-k)}=z\omega^{10-k}$ にある．これが z 自身に一致するのは，$\omega^{10-k}=1$ のときだから，①より，$10-k\equiv0\pmod 3$ ∴ $k=1,\ 4$

コインを 5 回投げる 2^5 通り中，表が 1 回出るときと表が 4 回出る（裏が 1 回出る）のは，どちらも 5 通りずつあるから，$P=\dfrac{5\times2}{2^5}=\mathbf{\dfrac{5}{16}}$

6 A から B への最短の道すじの 1 つ 1 つが選ばれる確率は，同様に確からしくありません（s，t となる確率は順に 1/8，1/32）．分岐点では，1/2 の確率でどちらに進むかが決まることに注意．



解 x と y が出会う可能性があるのは，両者がともに 3 進んだ図の点線上の 4 点．



x が点線上の点にたどり着くまで A および途中の 2 個の分岐点では必ず→か↑のどちらかに進めるから，点線上の点への最短経路の本数は 2^3 本で，これらは同様に確からしい．また，各頂点にたどり着く本数は図に書き込んだだけある．

x と y が C，D で出会う確率をそれぞれ P_C，P_D とおくと，直線 AB に関する対称性より，求めるのは

$2(P_C+P_D)$ ……………………………………①

・x が A→C，y が B→C と進むのはともに 1 通りだから，$P_C=\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^2=\dfrac{1}{2^6}$

・x が A→D，y が B→D と進むのはともに 3 通りあるから，$P_D=\left(\dfrac{3}{2^3}\right)^2=\dfrac{9}{2^6}$

∴ $①=2\times\left(\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{9}{2^6}\right)=\mathbf{\dfrac{5}{16}}$

7 （3） p_k 自体はゴチャゴチャした式ですが，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ と比をとると割にカンタンな式になって，大小比較がしやすくなります．

解 （2） 1 つのさいころを投げる試行 n 回において，各回に 1 が出るかどうかに着目すると，n 回中どの k 回に 1 が出るかで ${}_nC_k$ 通り．

また，さいころを 1 回投げて，出た目が 1 である確率は $\dfrac{1}{6}$，1 以外の奇数（＝3，5）である確率は $\dfrac{1}{3}$ だから，

$$p_k={}_nC_k\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(=\frac{n!}{k!(n-k)!\cdot6^k\cdot3^{n-k}}\right)\cdots①$$

［特に $n=3$，$k=1$ として，$p_1=3\times\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\mathbf{\dfrac{1}{18}}$］

（1）の答え↑

次に，n 回投げて出た目がすべて奇数である確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，出た目がすべて 1 以外の奇数であるのは $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

だから，$\boldsymbol{q}=\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(3) ①より，

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{n!\cdot k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!\cdot n!}\cdot\frac{6^k\cdot 3^{n-k}}{6^{k+1}\cdot 3^{n-k-1}}$$

$$=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{3}{6}\ \text{だから,}$$

$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}\leqq 1 \iff n-k\leqq 2(k+1) \iff n-2\leqq 3k$ ……②

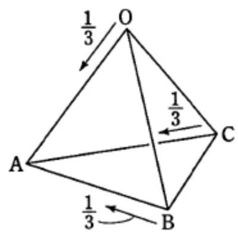
$n=3m+2$ だから，② $\iff \boldsymbol{k\geqq m}$ ……………………③

よって，③では $p_{k+1}\leqq p_k$（等号成立は $k=m$ のときのみ），$1\leqq k<m$ では $p_{k+1}>p_k$ となるので，

$$p_1<p_2<\cdots<p_m=p_{m+1}>\cdots>p_n$$

したがって，p_k が最大となるのは $\boldsymbol{k=m,\ m+1}$

8 n 秒後から $n+1$ 秒後への変化を考えると漸化式が立てられます．



解 (1) 対称性より，n 秒後に P が頂点 B，C にいる確率も p_n となるので，n 秒後に P が頂点 O にいる確率は $1-3p_n$．

$n+1$ 秒後に P が頂点 A にいるのは，n 秒後に P が O，B，C のいずれかにあったのち，各々 $\frac{1}{3}$ の確率で A に移動するときだから，

$$p_{n+1}=(1-3p_n)\times\frac{1}{3}+2p_n\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}}\ \cdots\cdots①$$

(2) ①より，$p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)$

$$\therefore\ p_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(p_0-\frac{1}{4}\right)$$

$p_0=0$ とより，$\boldsymbol{p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$

⇨**注1** (1)は，『n 秒後に A 以外の点にあるとき，どの点でも $n+1$ 秒後には 1/3 の確率で A にいるから，$p_{n+1}=(1-p_n)/3$』としてもいいでしょう．

⇨**注2** 極限状態（$n\to\infty$）では各頂点に P がいる確率はどれも等しいはずですが，ちゃんと $p_n\to 1/4$，$1-3p_n\to 1/4$ となっています．

9 今年の日本シリーズがテーマになったような問題ですが，A が先に 2 勝しているので優勝パターンが減り，場合分けも大変じゃないでしょう．

解 (1) A の勝ち負けを○，×で表す．A が何試合目で優勝するかで場合分けすると，

4 試合目：○○○○ と～～を連勝すればいいので，$\dfrac{1}{2^2}$

5 試合目：○○△△□ で△△の 2 試合中○が 1 個（残りは×）……①，□が○ならよい．①の確率は $\dfrac{2}{2^2}$ だから，5 試合目で A が優勝する確率は $\dfrac{2}{2^2}\cdot\dfrac{1}{2}$

6 試合目：○○△△△□ で△△△の 3 試合中○が 1 個，□が○ならよいので，同様に $\dfrac{3}{2^3}\cdot\dfrac{1}{2}$

7 試合目：○○△△△△□ で△△△△の 4 試合中○が 1 個，□が○ならよいので，同様に $\dfrac{4}{2^4}\cdot\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ \frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{2}{2^4}=\frac{4+4+3+2}{16}=\boldsymbol{\frac{13}{16}}$$

(2) B が優勝する確率は，$1-\dfrac{13}{16}=\dfrac{3}{16}$

また，B が優勝するのは，3 試合目から 4 連勝 …① か 7 試合目で勝って優勝……② のどちらかで，①の確率は $\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$ だから，②の確率は $\dfrac{3}{16}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{8}$

これらと(1)より，優勝するまでの試合数の期待値は

$$4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+6\times\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\right)+7\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=(4+5+6+7)\times\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{11}{2}}$$

10 (1) $1\leqq k\leqq n$ のときは，A，B から a，b を選ぶとして $a\leqq b=k$，$k=a>b$ の 2 パターンありますが，ステップ 1 の 9 番のように考えれば場合分けは不要です．

解 (1) A，B から 1 つずつ数を選ぶのは全部で，$n\cdot 2n=2n^2$ 通りある．

$k\geqq n+1$ のとき：p_k は，B から k が選ばれる（A からは何でもよい）確率だから，$\dfrac{n\cdot 1}{2n^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2n}}$

$1\leqq k\leqq n$ のとき：A の 1，2，…，k から 1 個，B の 1，2，…，k から 1 個選ぶのは k^2 通り．このうち $X=k$ とならないのは，A，B ともに 1，2，…，$k-1$ から 1 個ずつ選ぶ $(k-1)^2$ 通りだから，$X=k$ となるのは，$k^2-(k-1)^2=2k-1$ 通り．よって，$p_k=\boldsymbol{\dfrac{2k-1}{2n^2}}$

(2) $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{2k-1}{2n^2}+\sum_{k=n+1}^{2n}k\cdot\frac{1}{2n}$

$$=\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k^2-k)+\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}k$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{2n}\cdot\frac{(3n+1)n}{2}$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3n+1}{4}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}-\frac{n+1}{4n}+\frac{3n+1}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{13n^2+6n-1}{12n}}$$