け　い　さ　ん　り　き

【因数分解】

1. 次の式を因数分解せよ.

（1） $a^2+(2b-3)a-(3b^2+b-2)$　（00　松山大）

（2） $bc(b+2c)+2ca(c+3a)+3ab(a+b)$
$+7abc$　（00　岐阜経済大）

（3） $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3$
$+a^3+b^3+c^3$　（99　帝京大）

2. 次の式を因数分解せよ.

（1） $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$
（99　函館大）

（2） $(x^2+2x-35)(x^2+6x-27)+143$
（00　広島修道大）

【式の値】

3. 次の各式を計算して簡単にしなさい. ただし a, b, c は相異なるものとする.

（1） $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}$
$+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

（2） $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}$
$+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$　（00　名古屋学院大）

4. $x=4a^2+b^2$ のとき, 次の式の値を求めよ. ただし, $a\neq 0$, $b>0$ とする.

$\dfrac{\sqrt{x+4ab}+\sqrt{x-4ab}}{\sqrt{x+4ab}-\sqrt{x-4ab}}$　（00　広島修道大）

5. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$ のとき, $x^3-\dfrac{1}{x^3}$, $x^5-\dfrac{1}{x^5}$ の値を求めよ. ただし $0<x<1$ とする.　（99　立教大）

6. 実数 a が $a+\dfrac{1}{a}=\sqrt{5}$ をみたすとき, 次の値を求めよ.

（1） $a^2+\dfrac{1}{a^2}$　　（2） $a^5+\dfrac{1}{a^5}$

（99　富山大）

7. $x=\dfrac{1}{\sqrt{6+\sqrt{27}}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{6-\sqrt{27}}}$ のとき，$x+y$，xy および $x^3-y^3-2xy^2$ の値を求めよ．（00　松山大）

8. $x+y+z=3$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$ のとき，次の各式の値を求めよ．

（1）　$(x-3)(y-3)(z-3)$

（2）　$x^3+y^3+z^3$　（00　同志社大・神，法）

9. $\dfrac{a+1}{b+c+2}=\dfrac{b+1}{c+a+2}=\dfrac{c+1}{a+b+2}$ のとき，この式の値を求めると $\boxed{}$ である．（00　東北学院大）

10. $f(x)=x^4-2x^3+3x^2+4x+5$ とする．有理数 a，b が $\dfrac{1}{f(1+\sqrt{3})}=a+\sqrt{3}\,b$ を満たすとき，

$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である．（00　名城大）

【恒等式】

11. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{x^2}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}$

が x についての恒等式であるとき，$a=\boxed{}$，

$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ である．（類　99　工学院大）

12. 次の式 $2x^2+3xy-2y^2-px-3y+2$ は1次式の積に因数分解できる．このとき，定数 p の値を求め，与式を因数分解せよ．（99　千葉経済大）

13. 2つの等式 $x+y+2z=0$，$2x-y+z=3$ を満たす任意の x，y，z に対して，等式 $ax^2+by^2+cz^2=1$ が成り立つならば，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ である．（99　帝京大）

14. 等式 $(X+Y+Z)^3=aXYZ$

$+b\{X(Y-Z)^2+Y(Z-X)^2+Z(X-Y)^2\}$

$+c(X+Y+Z)\{(X-Y)^2+(Y-Z)^2+(Z-X)^2\}$

が，X，Y，Z についての恒等式となるためには，

$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ である．

（00　大阪薬大）

【整式の割り算】

15. 整式Aをx^2+x+1で割ったときの商が$2x+1$, x^2-x+1で割ったときの余りが$x+3$であったという. Aをx^2+x+1で割ったときの余りは$\boxed{}$, x^2-x+1で割ったときの商は$\boxed{}$であり, $A=\boxed{}$である.（00　摂南大）

16. a, bを実数とし, xの整式$f(x)$を$f(x)=x^2+ax+b$とする. xの整式$f(x^2)$を$f(x)$で割ったときの余りが$2abx+2b$となる(a, b)の組をすべて求めよ.（99　甲南大・文, 法）

17. 整式$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+13x-2a$（$a$, bは定数）が整式$(x+1)^2$で割り切れるとき, $a=\boxed{}$, $b=\boxed{}$である. このとき, 方程式$P(x)=0$の$x=-1$以外の解は小さい順に$x=\boxed{}$, $\boxed{}$である.（00　千葉工大）

18. nを3以上の整数とし, 整式x^nをx^2+1で割ったときの余りをa_nx+b_nとする. このとき$a_3=\boxed{}$, $b_3=\boxed{}$, $a_4=\boxed{}$, $b_4=\boxed{}$である. また, $a_{99}=\boxed{}$, $b_{99}=\boxed{}$である.

（99　名古屋商大）

19. xの整式$P(x)$を$x+1$で割ると5余り, $(x-1)^2$で割ると$x-4$余る. このとき次の問いに答えよ.

（1） $P(x)$を$x-1$で割ると余りは$\boxed{}$である.

（2） $P(x)$をx^2-1で割ると余りは$\boxed{}$である.

（3） $P(x)$を$(x+1)(x-1)^2$で割ると余りは$\boxed{}$である.（00　関大・総合情報）

20. $P(x)$がx^2+x-2で割り切れ, x^2+x-1で割ると$3x+4$余るとき, $P(x)$を$(x^2+x-2)(x^2+x-1)$で割った余りを求めよ.

（類　00　名古屋経済大）

21. m, nは正の整数とする.

（1） $x^{3m}+1$をx^3-1で割った余りを求めよ.

（2） x^n+1をx^2+x+1で割った余りを求めよ.

（98　室蘭工大）

1. 因数分解の公式をパッと適用できる場合を除いて，一番重要な定石は「できるだけ次数の低い1つの文字について整理する」ことです．

解　(1)　与式$=a^2+(2b-3)a-(3b^2+b-2)$

$$=\{a+k(3b-2)\}\{a+l(b+1)\}$$

k，l は1と-1で，$k(3b-2)+l(b+1)=(2b-3)$ になるように選びます．それは$k=1$，$l=-1$で答えは

$$(\boldsymbol{a+3b-2})(\boldsymbol{a-b-1})$$

(2)　「1つの文字について整理する」理由は全体にかかる因数（ここでは$b+2c$)が浮き出て来るからです．

与式$=3a^2(b+2c)+a(3b^2+2c^2+7bc)+bc(b+2c)$

$$=3a^2(b+2c)+a(b+2c)(3b+c)+bc(b+2c)$$

$$=(b+2c)\{3a^2+a(3b+c)+bc\}$$

$$=(b+2c)\{a\cdot(3a)+(3a)\cdot b+a\cdot c+bc\}$$

$$=(\boldsymbol{b+2c})(\boldsymbol{a+b})(\boldsymbol{3a+c})$$

(3)　a について整理すると

$$3a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2)$$
$$+3(b^3+b^2c+bc^2+c^3)$$

ここで$b^3+b^2c+bc^2+c^3$を因数分解すると

$$b^2(b+c)+c^2(b+c)=(b+c)(b^2+c^2)$$

となるので与式は

$$3a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2)+3(b+c)(b^2+c^2)$$

となります．$A=b+c$，$B=b^2+c^2$ として，上式が

$$3(a^3+a^2A+aB+AB)=3(a^2+B)(a+A)$$

と見えるならば$\boldsymbol{3(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}$が答えとわかります．しかし，$a$ について整理するより組合せを工夫し，共通な1つの因数を作り出すのが鋭い着眼です．

$$\underline{(a+b)^3+c^3}+\underline{(b+c)^3+a^3}+\underline{(c+a)^3+b^3}$$

と，下線をつけた組合せにして

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

を適用するとすべての組に$a+b+c$が現れ，

$$(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2$$
$$+(b+c)^2-(b+c)a+a^2+(c+a)^2-(c+a)b+b^2\}$$
$$=\boldsymbol{3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$

2. 固まりを作るのが定石です．

解　(1)　$x+1$ と $x+4$，$x+2$ と $x+3$ を組にすると

与式$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$

$x^2+5x=X$ とおくと

与式$=(X+4)(X+6)-24=X^2+10X$

$$=X(X+10)=\boldsymbol{x(x+5)(x^2+5x+10)}$$

(2)　与式$=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(x+7)(x-5)(x+9)(x-3)}+143$

〰〰の4つの因数を両端と内側で組み替え$x^2+4x=X$とおくと，

$$(x^2+4x-21)(x^2+4x-45)+143$$
$$=(X-21)(X-45)+143$$
$$=X^2-66X+1088=(X-33)^2-1$$
$$=(X-33+1)(X-33-1)$$
$$=(x^2+4x-32)(x^2+4x-34)$$
$$=\boldsymbol{(x-4)(x+8)(x^2+4x-34)}$$

3. 通分して整理するしかありません．

解　分母を$(a-b)(b-c)(c-a)$にして通分し，

(1)　分子$=-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)$

これを展開して，答えは**0**である．

(2)　分子$=-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

$$=-a^2(b-c)+a(b^2-c^2)-bc(b-c)$$
$$=-(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$$
$$=-(b-c)(a-c)(a-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

より答えは**1**

4. $\sqrt{x+4ab}=\sqrt{b^2+4ab+4a^2}$

$$=\sqrt{(b+2a)^2}=|b+2a|$$

$$\sqrt{x-4ab}=\sqrt{(b-2a)^2}=|b-2a|$$

を用いると場合分けが少し面倒です．まず分母の有理化をしましょう．

解☆　与式の分母・分子に$\sqrt{x+4ab}+\sqrt{x-4ab}$をかけると，分母は$(x+4ab)-(x-4ab)=8ab$になり

分子は$(\sqrt{x+4ab}+\sqrt{x-4ab})^2$

$$=x+4ab+x-4ab+2\sqrt{x^2-16a^2b^2}$$
$$=2x+2\sqrt{16a^4-8a^2b^2+b^4}$$
$$=2x+2\sqrt{(b^2-4a^2)^2}=8a^2+2b^2+2|b^2-4a^2|$$

となる．よって求める値は

$\boldsymbol{b^2\geqq 4a^2}$ のとき，$\dfrac{8a^2+2b^2+2(b^2-4a^2)}{8ab}=\boldsymbol{\dfrac{b}{2a}}$

$\boldsymbol{b^2\leqq 4a^2}$ のとき，$\dfrac{8a^2+2b^2+2(4a^2-b^2)}{8ab}=\boldsymbol{\dfrac{2a}{b}}$

5. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
を使うので $x-\dfrac{1}{x}$ が必要になります．

解　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=6$ より $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2=4$

$0<x<1$ より $x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}<0$

よって $x-\dfrac{1}{x}=-2$

$$\boldsymbol{x^3-\frac{1}{x^3}}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=-2\cdot7=\mathbf{-14}$$

$\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=x^5-\dfrac{1}{x^5}+x-\dfrac{1}{x}$ より

$$-14\cdot6=x^5-\frac{1}{x^5}-2\qquad\therefore\ \boldsymbol{x^5-\frac{1}{x^5}=-82}$$

6. (2)の方法はいろいろありますが，2乗と3乗から5乗をつくるのが一番素直でしょう．

解　(1)　$a+\dfrac{1}{a}=\sqrt{5}$ の両辺を2乗し

$$a^2+\frac{1}{a^2}+2=5\qquad\therefore\ a^2+\frac{1}{a^2}=\mathbf{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

(2)　$a^3+\dfrac{1}{a^3}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(a^2-a\cdot\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}\right)$

$$=\sqrt{5}(3-1)=2\sqrt{5}$$

$\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(a^3+\dfrac{1}{a^3}\right)=a^5+\dfrac{1}{a^5}+a+\dfrac{1}{a}$ より

$$3\cdot2\sqrt{5}=a^5+\frac{1}{a^5}+\sqrt{5}\qquad\therefore\ a^5+\frac{1}{a^5}=\mathbf{5\sqrt{5}}$$

7. 2重根号のはずしかたは
ルートの前を2にするように変形する
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$ となる a，b を見つける

解　$6+\sqrt{27}=\dfrac{12+2\sqrt{27}}{2}$

$12+2\sqrt{27}$ が $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$ の形となるように $a+b=12$，$ab=27$ となる数 a，b を求め，それは9と3だから

$$\sqrt{6+\sqrt{27}}=\sqrt{\frac{12+2\sqrt{27}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{9}+\sqrt{3})^2}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{9}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$
$$x=\frac{\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{6}$$

同様に $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6}$

よって　$\boldsymbol{xy}=\dfrac{2(9-3)}{36}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{x+y}=\mathbf{\sqrt{2}}$

$x^3-2xy^2-y^3=(x+y)(x^2-xy-y^2)$ であり

x^2-y^2 を計算すると $x^2-y^2=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ になるから

$$\boldsymbol{x^3-2xy^2-y^3}=\sqrt{2}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}\right)=\mathbf{\frac{-2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}}$$

8. x，y，z の基本対称式は $x+y+z$，$xy+yz+zx$，xyz です．これらで条件式を書き直します．

解　(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$ より

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{3}$$
$$xyz=3(xy+yz+zx)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

また　$x+y+z=3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$

$$(x-3)(y-3)(z-3)=xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27$$

ここに①，②を用いると求める値は $\mathbf{0}$

(2)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$$=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}$$
$$=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}$$

$xyz=k$ とおくと $3(xy+yz+zx)=k$ で，

$$x^3+y^3+z^3-3k=3(9-k)$$
$$x^3+y^3+z^3=\mathbf{27}$$

9. 比例式は $=k$ とおいて分母を払うのが定石です．またサイクリック（文字がグルグル回る）な式は辺ごとに加えれば対称式になり，扱いやすくなります．

解　与式を $=k$ とおいて分母を払うと

$a+1=k(b+c+2)\cdots\cdots$①，$b+1=k(c+a+2)$
$c+1=k(a+b+2)$

これらを辺ごとに加えれば

$$a+b+c+3=2k(a+b+c+3)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

(ア)　$a+b+c+3\neq0$ のとき②より $2k=1$
(イ)　$a+b+c+3=0$ のとき

$$b+c+2=-(a+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

となり与式の分母は0でないから

$$b+c+2\neq0\qquad\therefore\ a+1\neq0$$

①に③を用いて $a+1=-k(a+1)$　　$\therefore\ k=-1$

以上より $k=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$ または $\mathbf{-1}$

10. 次のいずれの方法も基本です.

解1　$f(1+t)=(1+t)^4-2(1+t)^3+3(1+t)^2$
$+4(1+t)+5$

$=1+4t+6t^2+4t^3+t^4-2(1+3t+3t^2+t^3)$
$+3(1+2t+t^2)+4(1+t)+5$
$=t^4+2t^3+3t^2+8t+11$
$f(1+\sqrt{3})=9+2\cdot 3\sqrt{3}+3\cdot 3+8\sqrt{3}+11$
$=29+14\sqrt{3}$

$$\frac{1}{f(1+\sqrt{3})}=\frac{29-14\sqrt{3}}{29^2-14^2\cdot 3}=\frac{29-14\sqrt{3}}{253}$$

$\boldsymbol{a=\frac{29}{253}}$, $\boldsymbol{b=-\frac{14}{253}}$

解2　$x=1+\sqrt{3}$ を解とする2次方程式を作る.
$(x-1)^2=3$ を整理し, $x^2-2x-2=0$ ………………①
$f(x)$ を x^2-2x-2 で割ると（ここは一般の整式の割り算であって，0で割るわけではありません．一時，①のことは忘れます.）商は x^2+5, 余りは $14x+15$ で,
$f(x)=(x^2-2x-2)(x^2+5)+14x+15$
ここに $1+\sqrt{3}$ を代入すると①になるから
$f(1+\sqrt{3})=14(1+\sqrt{3})+15=29+14\sqrt{3}$　　　（後略）

11. 2次の恒等式は異なる3つの値で成り立つことが必要十分です.

解　与式の両辺に $(x+1)^3$ をかけて
$(x+1)^2+x(x+1)+x^2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$
この両辺はまったく同じ式であるからこれはすべての実数 x で成り立つ．すなわち $x=-1$ でも成り立つから,
$x=-1$ を代入すると $c=1$
$x=0$, -2 を代入すると
$1=a+b+c$, $1+2+4=a-b+c$
$a+b=0$, $a-b=6$　　∴　$\boldsymbol{a=3}$, $\boldsymbol{b=-3}$

⇨注　与えられた分数式のままでは $x=-1$ を代入することはできませんが，分母を払った式は恒等式で両辺は整式として同じです．ここにはどんな x を代入することもできます.

12. まず2次式の部分を因数分解します．通常は整数係数の範囲で因数分解しますが，p が分数なら因数分解の係数も分数にならざるをえません.

解　$2x^2+3xy-2y^2-px-3y+2$
$=(2x-y)(x+2y)-px-3y+2$ ……………①
これが $(Ax+By+C)(Dx+Ey+F)$ の形となるとき $(Ax+By)(Dx+Ey)$ の部分は $(2x-y)(x+2y)$ である．よって①が $(2x-y+a)(x+2y+b)$ の形となる.
これを展開すると
$(2x-y)(x+2y)+(a+2b)x+(2a-b)y+ab$
①と係数をくらべ
$p=-(a+2b)$, $2a-b=-3$, $ab=2$
あとの2式より $b=2a+3$, $a(2a+3)=2$

$2a^2+3a-2=0$　　∴　$(2a-1)(a+2)=0$

$a=\frac{1}{2}$, -2 である.

$a=\frac{1}{2}$ のとき $b=2a+3=4$, $p=-(a+2b)=-\frac{17}{2}$
$a=-2$ のとき $b=2a+3=-1$, $p=-(a+2b)=4$
$p=-\frac{17}{2}$ のとき $\left(2x-y+\frac{1}{2}\right)(x+2y+4)$
$p=4$ のとき $(2x-y-2)(x+2y-1)$

13. $x+y+2z=0$, $2x-y+z=3$ の段階では「式が2つと文字が3つ」で，式が1つ少ないため「2文字が残りの1文字で表される」ことになります．その，最後まで残る文字についての恒等式を考えます.

解　$x+y+2z=0$ ……①, $2x-y+z=3$ ……②
①+②より $3x+3z=3$　　∴　$z=1-x$
①より $y=-(x+2z)=x-2$
$ax^2+by^2+cz^2=1$ に代入し
$ax^2+b(x-2)^2+c(1-x)^2=1$
$(a+b+c)x^2-2(2b+c)x+4b+c-1=0$
これが任意の x で成り立つから
$a+b+c=0$, $2b+c=0$, $4b+c-1=0$
これを解いて $\boldsymbol{b=\frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{c=-1}$, $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$

14. 必要条件で a, b, c を求めるだけなら簡単です.

解　$X=0$ のとき，与式は

$(Y+Z)^3=bYZ(Y+Z)+2c(Y+Z)(Y^2-YZ+Z^2)$

これが任意の Y, Z で成り立つ条件は

$$(Y+Z)^2=bYZ+2c(Y^2-YZ+Z^2)$$

が任意の Y, Z で成り立つことで，

両辺の Y^2, YZ の係数をくらべ

$$1=2c,\ 2=b-2c \qquad \therefore\ \boldsymbol{c=\frac{1}{2},\ b=3}$$

また，与式で $X=Y=Z$ とすると $27X^3=aX^3$

これが任意の X で成り立つ条件は $\boldsymbol{a=27}$

ここまでは必要条件です．このとき本当に与式が成り立つことを確認しましょう.

$$X+Y+Z=s,\ XY+YZ+ZX=t,\ XYZ=u$$

とおく.

$X(Y-Z)^2+Y(Z-X)^2+Z(X-Y)^2$

$=XY^2+XZ^2+YZ^2+YX^2+ZX^2+ZY^2-6XYZ$

$=(X+Y+Z)(XY+YZ+ZX)-3XYZ-6XYZ$

$=st-9u$

$(X-Y)^2+(Y-Z)^2+(Z-X)^2$

$=2(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)$

$=2\{(X+Y+Z)^2-3(XY+YZ+ZX)\}$

$=2(s^2-3t)$

すると満たすべき恒等式は

$$s^3=au+b(st-9u)+2c(s^3-3st)$$

となる．$2c=1$, $a=27$, $b=3$ のときこれは成り立つから十分である.

15. 本問は商と余りが両方とも問題になっていますから実際に割るのがよいでしょう.

解　A を x^2+x+1 で割ったときの余りを $ax+b$ とすると $A=(x^2+x+1)(2x+1)+ax+b$

$=2x^3+3x^2+3x+1+ax+b$

これを x^2-x+1 で実際に割ると，商は $2x+5$，余りは $(6+a)x+b-4$ で，

$$A=(x^2-x+1)(2x+5)+(6+a)x+b-4$$

$(6+a)x+b-4$ が $x+3$ であるから

$$6+a=1,\ b-4=3 \qquad \therefore\ a=-5,\ b=7$$

答えは順に $\boldsymbol{-5x+7}$, $\boldsymbol{2x+5}$, $\boldsymbol{2x^3+3x^2-2x+8}$

16. これも実際に割り算を実行するほうが早い.

解　$f(x^2)=x^4+ax^2+b$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で割ると，商は $x^2-ax+a-b+a^2$ で，余りは

$(2ab-a^2-a^3)x+b+b^2-ab-a^2b$

より　$2ab-a^2-a^3=2ab$ ……………………………①

　　$b+b^2-ab-a^2b=2b$ ……………………………②

①より $a^2+a^3=0$　　$\therefore\ a=0,\ -1$

$a=0$ のとき②より $b^2-b=0$　　$\therefore\ b=0,\ 1$

$a=-1$ のときも同じく $b=0$, 1 となる.

$\boldsymbol{(a,\ b)=(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (-1,\ 0),\ (-1,\ 1)}$

17. a, b を求めるのに一番早いのは微分の活用です.

解　$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+13x-2a$

$P'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+13$

$P(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れるための必要十分条件は

$P(-1)=0,\ P'(-1)=0$

$-3a+b-12=0,\ 3a-2b+9=0$

これを解くと $\boldsymbol{a=-5,\ b=-3}$

$P(x)=x^4-5x^3-3x^2+13x+10$

これを $(x+1)^2=x^2+2x+1$ で割ると

$P(x)=(x^2+2x+1)(x^2-7x+10)$

$P(x)=(x+1)^2(x-2)(x-5)=0$

の解で -1 以外のものは $\boldsymbol{x=2,\ 5}$ である.

【別解】 置き換えの活用もよく使われる.

$x+1=t$ とおく．$x=t-1$ で，

$P(x)=(t-1)^4+a(t-1)^3+b(t-1)^2+13(t-1)-2a$

$=t^4+(a-4)t^3+(b-3a+6)t^2$

$\quad+(9+3a-2b)t+b-3a-12$

これが $(x+1)^2=t^2$ で割り切れる条件は

$9+3a-2b=0,\ b-3a-12=0$　　　　(後略)

18. 商と余りを設定して，等式の形でおいて考えるのが定石です．商は不明なのですから，商を消すような x の値を代入します．今は $\pm i$ ($i=\sqrt{-1}$) です．

解　商を $f(x)$ として

$$x^n=(x^2+1)f(x)+a_nx+b_n$$

ここで $x=i$, $-i$ とおくと

$$i^n=a_ni+b_n,\ (-i)^n=-a_ni+b_n$$

これより a_n, b_n を求めて

$$a_n=\frac{i^n-(-i)^n}{2i},\ b_n=\frac{i^n+(-i)^n}{2}$$

$\boldsymbol{a_3=-1,\ b_3=0,\ a_4=0,\ b_4=1,}$

$\boldsymbol{a_{99}=-1,\ b_{99}=0}$

19. 整式の割り算は，商と余りを設定して等式の形において考えるのは同じです．

解　以下 $A(x)$ などは整式を表す．与えられた条件より　$P(x)=(x+1)A(x)+5$ ……………………①

$P(x)=(x-1)^2B(x)+x-4$ ………………②

と表される．

(1)　②で $x=1$ とおくと $P(1)=-3$

剰余の定理より，$P(x)$ を $(x-1)$ で割ったときの余りは $\boldsymbol{-3}$

(2)　$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $C(x)$，余りを $ax+b$ として，

$P(x)=(x-1)(x+1)C(x)+ax+b$ ……③

①で $x=-1$ として $P(-1)=5$ であり，$P(1)=-3$ であるから，③で $x=-1$, 1 とおくと

$$-a+b=5,\ a+b=-3$$

これを解いて $a=-4$, $b=1$ で求める余りは $\boldsymbol{-4x+1}$

(3)　$P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割った商を $D(x)$，余りを cx^2+dx+e として

$P(x)=(x+1)(x-1)^2D(x)+cx^2+dx+e$ ……④

と表し，c, d, e を求めると考えてもよいが，少し面倒である．そこで，②にはすでに $(x-1)^2$ があるので，これを変形して④にすると考えた方が早い．①=② で $x=-1$ とおくと

$$5=4B(-1)-5 \qquad \therefore\ B(-1)=\frac{5}{2}$$

剰余の定理より $B(x)$ を $x+1$ で割った余りが $\frac{5}{2}$ であるから $B(x)=(x+1)E(x)+\frac{5}{2}$ とおけて，②に代入し

$$P(x)=(x-1)^2\left\{(x+1)E(x)+\frac{5}{2}\right\}+x-4$$
$$=(x-1)^2(x+1)E(x)+\frac{5}{2}(x-1)^2+x-4$$

求める余りは $\frac{5}{2}(x-1)^2+x-4=\boldsymbol{\frac{5}{2}x^2-4x-\frac{3}{2}}$

20. 元の問題文を短縮しました．

解　以下 $A(x)$ などは整式を表す．

$P(x)=(x^2+x-2)A(x)$ …………………………①

$P(x)=(x^2+x-1)B(x)+3x+4$ ……………②

とおけて，$P(x)$ を $(x^2+x-2)(x^2+x-1)$ で割ったときの商を $C(x)$，余りを $R(x)$ として

$P(x)=(x^2+x-2)(x^2+x-1)C(x)+R(x)$ ……③

②を変形して③の形にすると考える．そのために $B(x)$ を x^2+x-2 で割って商を $D(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$B(x)=(x-1)(x+2)D(x)+ax+b$ …………④

ところで，①で $x=1$, $x=-2$ とおくと 0 であるから②で $x=1$, $x=-2$ とおくと $B(1)+7=0$, $B(-2)-2=0$

④より $a+b=-7$, $-2a+b=2$

よって $a=-3$, $b=-4$

$$B(x)=(x-1)(x+2)D(x)-3x-4$$

これを②に代入し整理すると

$$P(x)=(x^2+x-1)(x^2+x-2)D(x)$$
$$-(x^2+x-2)(3x+4)$$

答えは $-(x^2+x-2)(3x+4)=\boldsymbol{-3x^3-7x^2+2x+8}$

21. (2)は(1)を活用しましょう．

解　(1)　$x^{3m}+1=(x^3)^m+1=(x^3-1+1)^m+1$

で x^3-1 を固まりとして二項展開すると $A(x)$ を整式として $x^{3m}+1=(x^3-1)A(x)+2$ の形となるから，余りは **2** である．

(2)　$x^{3m}+1=(x-1)(x^2+x+1)A(x)+2$………①

より **$\boldsymbol{n}$ が 3 の倍数のとき** ($n=3m$) $x^{3m}+1$ を x^2+x+1 で割った余りは **2** である．①より

$x^{3m}=(x-1)(x^2+x+1)A(x)+1$ ………………②

となる．②に x をかけて 1 をたすと

$$x^{3m+1}+1=x(x-1)(x^2+x+1)A(x)+x+1$$

$\boldsymbol{n}$ が 3 で割って 1 余るとき ($n=3m+1$) 求める余りは $\boldsymbol{x+1}$ である．

②に x^2 をかけて 1 をたすと

$$x^{3m+2}+1=x^2(x-1)(x^2+x+1)A(x)+x^2+1$$
$$=x^2(x-1)(x^2+x+1)A(x)+(x^2+x+1)-x$$

$\boldsymbol{n}$ が 3 で割って 2 余るとき ($n=3m+2$) 答えは $\boldsymbol{-x}$