杏林大学医学部数学　セレクション

【１】

確率の練習

A と B の 2 人が何回か続けてあるゲームを行う。各回のゲームでは必ずどちらかが勝ち，引き分けはない。

(1)　2 人のゲームの腕前が同じ場合を考える。

(a)　5 回ゲームを行うとき，A が 2 勝 3 敗になる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。また，2 人とも 2 勝した後，5 回目に B が勝つ確率は，$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である。

(b)　何回も続けてゲームを行い，どちらかが 4 勝した時点でゲームを終了させる。6 回以内にゲームが終了する確率は $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコ}}$ である。

(2)　A が B より腕前が勝っており，A の勝つ確率が常に B の勝つ確率の $\dfrac{3}{2}$ 倍になっている場合を考える。5 回ゲームを行うとして，以下の問いに答えよ。

(c)　B が 3 勝 2 敗になる確率を考える。1 回目に B が勝つ場合の確率は，1 回目に B が負ける場合の確率の $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ 倍になる。

(d)　B の勝ち数が A の勝ち数をどの時点でも常に上回っているような勝負になる確率は $\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタチ}}$ である。

【２】

パラメータ曲線（実は有名曲線）

はじめに xy 平面上の点 $(0\,,\ 2)$ に中心が置かれた半径 2 の円が，x 軸上をすべることなく x 軸の正の方向に向かって転がる。はじめに原点 O にあった円周上の定点 P の描く曲線を考える。円が角 θ ラジアンだけ回転したときの P の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x = \boxed{\text{ア}}\left(\boxed{\text{イ}} - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

$$y = \boxed{\text{エ}}\left(\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}\right)$$

となる。P が再び x 軸に接する点 A の x 座標は $\boxed{\text{キ}}\,\pi$ である。P から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を B とする。$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，円が θ だけ回転するまでに P が描く曲線と x 軸および線分 PB によって囲まれる部分の面積 $S(\theta)$ は

$$S(\theta) = \boxed{\text{ク}} \times \boxed{\text{ケ}} - \boxed{\text{コ}} \times \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}}$$

となる。したがって，P が A まで移動するとき描く曲線と x 軸によって囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{スセ}}\,\pi$ となる。円の中心を通る x 軸に平行な直線と P が A まで移動するとき描く曲線との交点を，原点に近い順に C と D とする。C と D に対応する円の回転角はそれぞれ $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\pi$ と $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$ となる。また，P の描く曲線と線分 CD によって囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{テ}}\,\pi + \boxed{\text{ト}}$ である。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

① 1　② θ　③ $\sin\theta$　④ $\cos\theta$

⑤ $\sin 2\theta$　⑥ $\cos 2\theta$

【３】

$\boxed{\text{２つの円の共通接線}}$

(1)　点 O，O$'$ を中心とする 2 つの円が，$\mathrm{OO'}=10$ のとき外接し，$\mathrm{OO'}=4$ のとき内接する。大きい方の円の半径は $\boxed{\text{ア}}$ ，小さい方の円の半径は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，$\mathrm{OO'}=12$ のとき，1 つの共通接線による接点間の距離の中で長い方は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，短い方は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

(2)　極方程式（平行移動）

解答欄 $\boxed{\text{チ}}$ の解答は次の解答群から１つ選べ。

放物線

$x^2=-6y+9$ ……………………………………………………………①

の焦点の座標は $(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}})$，準線は $y=\boxed{\text{コ}}$ である。

直線

$y=\sqrt{3}x+k$ ……………………………………………………………②

が①と接するとき，$k=\boxed{\text{サ}}$，接点の座標は

$\left(\boxed{\text{シス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}},\ \boxed{\text{ソタ}}\right)$ である。

xy 座標の原点を極，x 軸の正の方向を始線とする極座標 $(r\ ,\ \theta)$ を用いると，放物線①の極方程式は

$r(\boxed{\text{チ}})=\boxed{\text{ツ}}$

となり，接線②の極方程式は

$$r\sin\left(\theta-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\pi\right)=\boxed{\text{ナ}}$$

となる。また，接点の極座標は $\left(\boxed{\text{ニ}},\ \dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\pi\right)$ である。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

①　$1+\sin\theta$　　②　$1+\cos\theta$　　③　$1-\sin\theta$　　④　$1-\cos\theta$

【4】

(1)　$\boxed{\text{計算問題}}$

座標平面上に $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x$ で表される曲線 C_1 と，$y=\dfrac{1}{3}x+k$ で表される直線 l_1 がある。ここで k は正の数である。C_1 は $x=\boxed{\text{ア}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ をとる。C_1 と l_1 が接するとき $k=\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ であり，接点以外の共有点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。また，C_1 と l_1 によって囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{シ}}$ となる。

(2)　$\boxed{\text{連続性、微分可能性、回転体体積}}$

$\boxed{\text{ス}}$ の解答は以下の解答群から 1 つ選べ。

座標平面上に $y=x|x-3|+1$ で表される曲線 C_2 がある。C_2 は区間 $(-\infty, +\infty)$ において $\boxed{\text{ス}}$ 。C_2 と $y=1$ で表される直線 l_2 によって囲まれた図形を，l_2 のまわりに 1 回転させたときにできる立体の体積は，$\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\pi$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

①　連続で微分可能である	②　連続だが微分可能ではない
③　不連続だが微分可能である	④　不連続で微分可能ではない

【５】

$\boxed{\text{２つの円の共通接線再び}}$

座標平面上に原点を中心とする半径１の円 C_1 と，$(4\sqrt{3}, 6)$ を中心とし，

$$x^2+y^2-ax-by+c=0$$

で表される円 C_2 がある。このとき $a=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，$b=\boxed{\text{ウエ}}$ であり，$c<\boxed{\text{オカ}}$ が成り立つ。

C_1 と C_2 が共有点を持つとき，

$$\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}-\boxed{\text{サ}} \leqq c \leqq \boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}-\boxed{\text{ソ}}$$

が成り立つ。

C_2 の半径が２のとき，C_1 と C_2 の共通接線のなかで，傾きが最大の共通接線 l の方程式は $y=\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\,x-\boxed{\text{チ}}$ であり，l と C_2 の接点は $\left(\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}, \boxed{\text{ト}}\right)$ である。

また，傾きが最小の共通接線と l の交点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}, \boxed{\text{ネ}}\right)$$

である。

【６】

$\boxed{\text{パズル？？}}$

(1)

$$a=2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}}}$$

のとき，

$$\log_8 a=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエオ}}}$$

となる。

(2) $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答は以下の解答群から一つずつ選べ。

ベクトル方程式の練習

空間に異なる 2 つの定点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ と動点 $P(\vec{p})$ がある。P が $(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}-\vec{b}|^2$ を満たしながら動くとき，P が描く図形 F_1 は $\boxed{\text{カ}}$ である。P が $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ を満たしながら動くとき，P が描く図形 F_2 は $\boxed{\text{キ}}$ である。F_1 と F_2 の共有点の図形は $\boxed{\text{ク}}$ となる。

$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ の解答群

① 点	② 直　線	③ 平　面	④ 円
⑤ 球　面	⑥ 放物線	⑦ 双曲線	⑧ 楕　円
⑨ ①～⑧以外の図形			

【7】

通過領域

原点 O から点 $(1, 0)$ へ等速で x 軸上を動く点 $\mathrm{P}(t, 0)$ と，点 $(0, 8)$ から原点 O へ P の 8 倍の速さで y 軸上を動く点 Q がある。2 点 P，Q は同時に動き始めるものとする。

(a)　線分 PQ の長さが最小になるのは $t = \dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$ のときであり，このとき $\mathrm{PQ} = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カキ}}\sqrt{\boxed{クケ}}$ となる。

(b)　線分 PQ 上の点 $\mathrm{R}(x, y)$ を考える。t が 0 から 1 まで変化するとき，R の各 x 座標に対して y 座標の最大値を求めると

$$y = \boxed{コ}(1 - x^{r})^{\boxed{サ}} \cdots\cdots\cdots (*)$$

を得る。ここで $r = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

(c)　線分 PQ が通過する領域の面積は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ である。

(d)　式(*)で表される曲線上の点 T のうち，原点 O にもっとも近いのは T の x 座標が $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}$ のときである。

このとき $\mathrm{OT} = \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナニ}}\sqrt{\boxed{ヌ}}$ となる。

【８】難

合成関数

$f(x)=2x^2-1$として，以下の問いに答えよ。

(a)　2 つの条件

$$\left.\begin{array}{r} f(f(f(\cos\theta)))=\cos\theta \\ f(\cos\theta)\neq\cos\theta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(*)}$$

を同時に満たす正のθのうち，最小のものをα，2 番目に小さいものをβとすると，$\alpha=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi$，$\beta=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$である。また，(*)を満たす正の$\theta$のうち，3 番目あるいは 4 番目に小さいものは$\boxed{\text{オ}}\,\alpha$や$\boxed{\text{カ}}\,\beta$，5 番目あるいは 6 番目に小さいものは$\boxed{\text{キ}}\,\alpha$や$\boxed{\text{ク}}\,\beta$と表すことができる。

(b)　xの多項式$f(f(f(x)))-x$は，$f(f(f(x)))-x=(f(x)-x)g(x)h(x)$と表せる。

ただし，

$g(x)=\boxed{\text{ケ}}\,x^3-\boxed{\text{コ}}\,x+\boxed{\text{サ}}$，

$h(x)=8x^3+\boxed{\text{シ}}\,x^2-4x-\boxed{\text{ス}}$

である。

(c)　$g(\cos\theta)=0$を満たすθに対して，$\cos3\theta=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$が成立する。

また，$h(\cos\beta)=\boxed{\text{チ}}$となる。

(d)　α，βに対し，次式が成立する。

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos(\boxed{\text{オ}}\,\alpha)}+\frac{1}{\cos(\boxed{\text{キ}}\,\alpha)}=\boxed{\text{ツ}},$$

$$\cos\beta+\cos(\boxed{\text{カ}}\,\beta)+\cos(\boxed{\text{ク}}\,\beta)=\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

【９】

$\boxed{\text{正五角形、極座標}}$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答は解答群の中から最も適当なものを 1 つ選べ。

一辺の長さが 2 である正五角形OABCDにおいて，$\vec{a}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$， $\vec{d}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$， $k=|\overrightarrow{\mathrm{DA}}|$ とする。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ と $|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|=k$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\vec{a}+\boxed{\text{ア}}\,\vec{d}$$

が成り立つ。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boxed{\text{イ}}\,\vec{a}+k\vec{d}$$

と表せる。

(b) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=k$ より，

$$k=\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}，\quad \vec{a}\cdot\vec{d}=\frac{\boxed{\text{オ}}-\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。

また，直線OAと直線BCの交点をEとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(\boxed{\text{ク}}+\sqrt{\boxed{\text{ケ}}})\vec{a}$$

であり，点Eは線分BCを $2:\boxed{\text{コ}}+\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ に外分する。

(c) 正五角形OABCDの内接円の半径をαとすると，

$$\alpha^2=\boxed{\text{シ}}+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。点 O を極とし，半直線 $t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ (t \geqq 0)$ を始線としたとき，極座標 $(r\,,\ \theta)$ を用いて直線ADの極方程式は $r=\boxed{\text{タ}}$ と表わされる。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

① $2\cos\theta+\dfrac{2}{\alpha}\sin\theta$　② $2\cos\theta-\dfrac{2}{\alpha}\sin\theta$　③ $2\cos\theta+2\alpha\sin\theta$

④ $2\cos\theta-2\alpha\sin\theta$　⑤ $\dfrac{2\alpha}{\alpha\cos\theta+\sin\theta}$　⑥ $\dfrac{2\alpha}{\alpha\cos\theta-\sin\theta}$

⑦ $\dfrac{2}{\cos\theta+\alpha\sin\theta}$　⑧ $\dfrac{2}{\cos\theta-\alpha\sin\theta}$

【１０】

$\boxed{\text{合成関数}}$

x を実数，$f(x)=|x^2-x-6|$ として，以下の問いに答えよ。

(a)　不等式 $f(x)>2x+6$ の解は

$$x<\frac{\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad \boxed{\text{オカ}}<x<\boxed{\text{キ}},\quad \frac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}<x$$

である。

(b)　方程式 $f(x)=2x+k$ が異なる 3 つの実数解を持つように，定数 k の値を求めると，$k=\boxed{\text{ク}}$ または $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ となる。

(c)　区間 $-3<x<4$ において，$y=\sin(f(x))$ のグラフには，極大となる点が $\boxed{\text{シ}}$ 個存在する。これらの点のうち，極大値が 1 未満となるのは，$x=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ のときである。

【解答１】<G114M12> 2006 杏林大学 2/1, 1次, 本学･地方 医学部

❷ 〔答〕 (1) (i) ア 5 イウ 16 エ 3
オカ 16 (ii) キク 11 ケコ 16
(2) (i) サ 3 シ 2 (ii) スセ 64 ソタチ 625

解説 (1) (i) 5回のうちどの2回でAが勝つかを選ぶ方法が ${}_5C_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ 通り.

星取り表を固定するとAが2回，Bが3回勝つ確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{32}$$

両者をかけて，$10\times\frac{1}{32}=\frac{5}{16}$

最初の4回のうちどの2回でAが勝つかを選ぶ方法が

$${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6\text{ 通り}$$

星取り表を固定したときAが2回，Bが3回勝つ確率は前と同じで，$\frac{1}{32}$

両者をかけて，$6\times\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

(ii) Aが最初から4連勝する確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

Bが最初から4連勝する確率も同じで，$\frac{1}{16}$

Aが最初の4回で3勝し，5回目で4勝となる確率は

$${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{8}$$

Bが最初の4回で3勝し，5回目で4勝となる確率も同じで，$\frac{1}{8}$

Aが最初の5回で3勝し，6回目で4勝となる確率は

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{32}$$

Bの場合も同じで，$\frac{5}{32}$

よって $\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{5}{32}\right)\times2=\frac{11}{16}$

(2) Bの勝つ確率を p とおくと，Aの勝つ確率は $\frac{3}{2}p$

引き分けがないことから，$p+\frac{3}{2}p=1$. よって，$p=\frac{2}{5}$

したがって，Aの勝つ確率は $\frac{3}{5}$

(i) 1回目にBが勝ち，その後Bが2勝する確率は，

$$\frac{2}{5}\times{}_4C_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

1回目にBが負け，その後Bが3勝する確率は，

$$\frac{3}{5}\times{}_4C_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)$$

前者の後者に対する比は，$\frac{{}_4C_2}{{}_4C_3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

(ii) (ア) Bが2勝以下のとき：5回めには必ず，Bの勝ち数がAの勝ち数を下回るので不適.

(イ) Bが3勝するとき：各回で勝つ人の並びはBBABAとBBBAAの2通りである．その確率は，

$$2\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{144}{5^5}$$

(ウ) Bが4勝するとき：各回で勝つ人の並びはBBABB，BBBAB，BBBBAの3通り．その確率は，

$$3\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{144}{5^5}$$

(エ) Bが5勝するとき：Bが全勝なので，確率は，

$$\left(\frac{2}{5}\right)^5=\frac{32}{5^5}$$

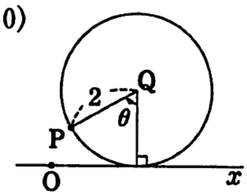
(ア)～(エ)の確率の総和より，

$$\frac{144}{5^5}+\frac{144}{5^5}+\frac{32}{5^5}=\frac{320}{5^5}=\frac{64}{5^4}=\frac{64}{625}$$

【解答２】<G114M14> 2006 杏林大学 2/1, 1次,本学･地方 医学部

❹ 〔答〕 ア　2　イ　θ　ウ　$\sin\theta$　エ　2
オ　1　カ　$\cos\theta$　キ　4　ク　6　ケ　θ　コ　8
サ　$\sin\theta$　シ　$\sin 2\theta$　スセ　12　ソ　1　タ　2
チ　3　ツ　2　テ　2　ト　8

解 説　円と x 軸の接点は $(2\theta,\ 0)$ なので，円の中心をQとおくと，$Q(2\theta,\ 2)$ となる．



$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 方向から時計回りに計って角 θ の所に $\overrightarrow{QP}$ がある．

$|\overrightarrow{QP}|=2$ なので，$\overrightarrow{QP}=2\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

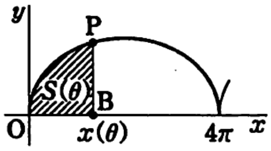
$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}=2\begin{pmatrix} \theta-\sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}$$

よって，

$$x=2(\theta-\sin\theta),\ \ y=2(1-\cos\theta)$$

$y=0$ となるのは，$\cos\theta=1$ のとき，つまり，$\theta=2\pi n$（n は整数）のとき．このとき，$x=2(2\pi n-\sin 2\pi n)=4\pi n$ となる．$x>0$ となる最小のものは

$x=4\pi$（$\theta=2\pi$ のとき）



積分変数を x から θ に置換すると，

$$S(\theta)=\int_0^{x(\theta)} y\,dx=\int_0^{\theta} y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\theta} 2(1-\cos\theta)\cdot 2(1-\cos\theta)d\theta$$
$$=2\int_0^{\theta}(2-4\cos\theta+2\cos^2\theta)d\theta$$
$$=2\int_0^{\theta}\{2-4\cos\theta+(1+\cos 2\theta)\}d\theta$$
$$=2\left[3\theta-4\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\theta}$$
$$=6\theta-8\sin\theta+\sin 2\theta$$

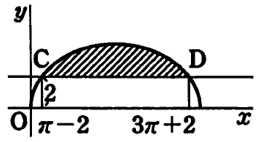
PがAにくるときの θ は 2π だったので，$S(2\pi)=12\pi$

CD：$y=2$ である．このときの $\theta\,(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ は，

$2=2(1-\cos\theta)$

$\iff \cos\theta=0$

$\iff \theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}$



$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x=\pi-2$

$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$ のとき，$x=3\pi+2$

弧CDと x 軸の間の部分から，線分CDと x 軸の間の長方形の部分を抜けばよい．

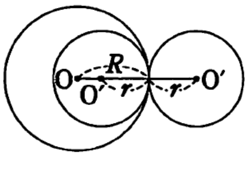
よって，

$$\left\{S\left(\frac{3\pi}{2}\right)-S\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}-\{(3\pi+2)-(\pi-2)\}\times 2$$
$$=(9\pi+8)-(3\pi-8)-2(2\pi+4)=2\pi+8$$

【解答３】<H114M11> 2007 杏林大学 2/1,一次 医

(1)	ア	7	イ	3	ウ	8	エ	2
	オ	2	カ	1	キ	1		
(2)	ク	0	ケ	0	コ	3	サ	6
	シ	−	ス	3	セ	3	ソ	−
	タ	3	チ	1	ツ	3	テ	1
	ト	3	ナ	3	ニ	6	ヌ	7
	ネ	6						

解 説 **(1)** 大きい方の円の中心をO，半径をR，小さい方の円の中心をO′，半径をrとする。



OO′=10 のとき外接するから

$R+r=10$ ………①

OO′=4 のとき内接するから

$R-r=4$ ………②

①，②より，$R=7$，$r=3$ （上図参照）

次に，共通(外)接線と，円O，O′との接点をS，S′とし，O′からOSにおろした垂線の足をHとすると，

$O'H=7-3=4$，$OO'=12$

であるから，三平方の定理により，

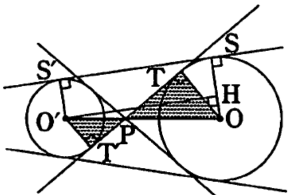
$SS'=\sqrt{12^2-4^2}=\sqrt{4^2(9-1)}=8\sqrt{2}$

また，共通(内)接線と，円O，O′との接点をT，T′，TT′とOO′の交点をPとすると，

△OPT∽△O′PT′

で，その相似比は，

OT：OT′=7：3



OO′=12 であるから，

$$OP=12\times\frac{7}{7+3}=\frac{42}{5}$$

$$OP'=12\times\frac{3}{7\times3}=\frac{18}{5}$$

三平方の定理により，

$$TT'=TP+T'P=\sqrt{\left(\frac{42}{5}\right)^2-7^2}+\sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2-3^2}$$

$$=\sqrt{\frac{42^2-35^2}{5^2}}+\sqrt{\frac{18^2-15^2}{5^2}}$$

$$=\frac{1}{5}\{\sqrt{(42+35)(42-35)}+\sqrt{(18+15)(18-15)}\}$$

$$=\frac{1}{5}(7\sqrt{11}+3\sqrt{11})=2\sqrt{11}$$

(2) $x^2=-6y+9$ ………①

①は，$x^2=4\left(-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)$

と変形され，放物線：$x^2=4\left(-\frac{3}{2}\right)y$ ………①′ をy軸方向に$\frac{3}{2}$平行移動したものである．①′については，

焦点$\left(0,\ -\frac{3}{2}\right)$，準線 $y=\frac{3}{2}$

であるから，y軸方向に$\frac{3}{2}$平行移動して，①については，焦点(0，0)，準線 $y=3$

次に，$y=\sqrt{3}x+k$ ………② を①に代入すると，

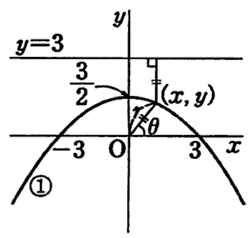
$x^2=-6(\sqrt{3}x+k)+9$

$(x+3\sqrt{3})^2-36+6k=0$

これは，$-36+6k=0$ のとき，重解 $x=-3\sqrt{3}$ をもつから，②が①と接するとき，$k=6$，接点の座標は，$(-3\sqrt{3},\ -3)$である．

xy平面上で原点を極，x軸の正の方向を始線とする極座標$(r,\ \theta)$と，xy座標$(x,\ y)$の関係は，

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ ………③



で，放物線上の点においては，

焦点(原点)までの距離と，準線($y=3$)までの距離が等しいから，$r=3-r\sin\theta$ （右上図参照）

よって，①の極方程式として，

$r(1+\sin\theta)=3$

を得る，また，接線②の極方程式は，③を代入して，

$r\sin\theta=\sqrt{3}r\cos\theta+6$

$r(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)=6$

$$r\cdot2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=6$$

$$r\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta\right\}=3$$

$$\therefore\quad r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=3$$

また，接点は，xy座標で，

$$(-3\sqrt{3},\ -\sqrt{3})=6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$$

$$=6\left(\cos\frac{7\pi}{6},\ \sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

と書けるから，その極座標は $\left(6,\ \frac{7}{6}\pi\right)$

【解答４】<H114M14> 2007 杏林大学 2/1,一次 医

(1)	ア	1	イ	2	ウ	3	エ	4
	オ	6	カ	2	キ	7	ク	−
	ケ	2	コ	6	サ	3	シ	1
(2)	ス	②	セ	8	ソ	1	タ	1
	チ	0						

解説 (1) $C_1 : y=-\frac{1}{3}x^3+x$, $l_1 : y=\frac{1}{3}x+k$

$$y'=-x^2+1=-(x+1)(x-1)$$

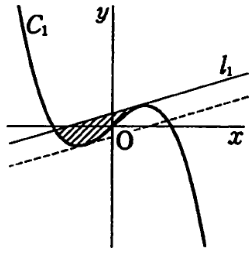
y' の符号は，$x=1$ の前後で正から負に変化し，

$x=1$ のとき，y は極大値：$-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

をとる．$\left(x=-1\right.$ で極小値：$\left.\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}\right)$

次に，$y'=-x^2+1=\frac{1}{3}$ より，

$$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$



を得るが，右図に注意すると，接線 l_1 の y 切片 k が正となるのは $x=\frac{\sqrt{6}}{3}$ のときで，このとき，$y=-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3+\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{7\sqrt{6}}{27}$

となるから，l_1 は，C_1 上の点 $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{7\sqrt{6}}{27}\right)$ における接線は $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+\frac{7\sqrt{6}}{27}$ である．

$$\therefore\quad k=-\frac{\sqrt{6}}{9}+\frac{7\sqrt{6}}{27}=\frac{4\sqrt{6}}{27}$$

このとき，C_1 と l_1 の方程式を連立すると，

$$-\frac{1}{3}x^3+x=\frac{1}{3}x+\frac{4\sqrt{6}}{27},\ \frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x+\frac{4\sqrt{6}}{27}=0$$

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=0$$

$$\left(\because\quad x=\frac{\sqrt{6}}{3} : 重解\right)$$

よって，接点以外の共有点の座標は，$\frac{-2\sqrt{6}}{3}$

上の計算に注意して，求める面積は，

$$\int_{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left\{\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+\sqrt{6}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left\{\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3+\sqrt{6}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^4+\frac{\sqrt{6}}{3}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3\right]_{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=1$$

$$\therefore\quad k=-\frac{\sqrt{6}}{9}+\frac{7\sqrt{6}}{27}=\frac{4\sqrt{6}}{27}$$

このとき，C_1 と l_1 の方程式を連立すると，

$$-\frac{1}{3}x^3+x=\frac{1}{3}x+\frac{4\sqrt{6}}{27},\ \frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x+\frac{4\sqrt{6}}{27}=0$$

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=0$$

$$\left(\because\quad x=\frac{\sqrt{6}}{3} : 重解\right)$$

よって，接点以外の共有点の座標は，$\frac{-2\sqrt{6}}{3}$

上の計算に注意して，求める面積は，

$$\int_{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\frac{1}{3}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\left\{\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+\sqrt{6}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left\{\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3+\sqrt{6}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^4+\frac{\sqrt{6}}{3}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3\right]_{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=1$$

【解答５】<J114M31> 2008 杏林大学 2/1, 一次 医

解　説 C_2 は $(4\sqrt{3},\ 6)$ を中心とし，その方程式の定数項が c だから，

$$C_2 : (x-4\sqrt{3})^2+(y-6)^2=84-c$$

よって，$(\text{半径})^2=84-c>0$ より，$c<84$

C_1，C_2 の中心 $(0,\ 0)$，$(4\sqrt{3},\ 6)$ の間の距離は，

$$\sqrt{(4\sqrt{3})^2+6^2}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$$

であるから，C_1，C_2 が共有点をもつ条件は，

$$2\sqrt{21}-1\leqq\sqrt{84-c}\leqq 2\sqrt{21}+1$$

$$85-4\sqrt{21}\leqq 84-c\leqq 85+4\sqrt{21}$$

$$\therefore\quad -4\sqrt{21}-1\leqq c\leqq 4\sqrt{21}-1$$

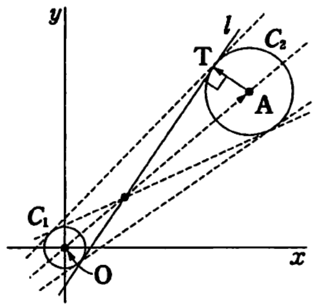
次に，C_2 の半径が $2\,(<2\sqrt{21}-1)$ のとき，C_1，C_2 は共有点をもたず，C_2 は第１象限の内部にある．

したがって，共通接線のなかで，傾きが最大となるものと C_1 の接点 $(x_1,\ y_1)$ は第４象限にあって，$x_1>0$，$y_1<0$，その方程式は，

$$x_1x+y_1y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

である．①が C_2 にも接する条件は，

$$x_1{}^2+y_1{}^2=1 \quad \cdots\cdots ②$$



と，C_2 の中心 $(4\sqrt{3},\ 6)$ が①の下側：$x_1x+y_1y-1>0$ $(\because\ y_1<0)$ にあることに注意すると，点と直線の距離の公式により，

$$4\sqrt{3}x_1+6y_1-1=2 \quad (=C_2 \text{の半径})$$

$$y_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1+\frac{1}{2}$$

を②へ代入，整理すると，

$$28x_1{}^2-8\sqrt{3}x_1-9=0 \qquad \therefore\quad x_1=\frac{2\sqrt{3}\pm5\sqrt{3}}{14}$$

$x_1>0$，$y_1<0$　だから　$(x_1,\ y_1)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$$\therefore\quad l : y=\sqrt{3}x-2$$

l の方向ベクトルは $(1,\ \sqrt{3})$ であり，これに垂直かつ大きさ $2\,(=C_2$ の半径) のベクトル $(-\sqrt{3},\ 1)$ を考え，C_2 の中心を A，l と C_2 の接点を T とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(-\sqrt{3},\ 1)$$

だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(4\sqrt{3},\ 6)+(-\sqrt{3},\ 1)$$

$$=(3\sqrt{3},\ 7)$$

$$\therefore\quad \mathrm{T}(3\sqrt{3},\ 7)$$

さらに，傾き最小の共通接線 l' は，２円の中心を通る直線　$m : y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ について l と対称だから

l と l' の交点 $=l$ と m の交点

で，l と m の方程式を連立して，l と l' の交点の座標は，$\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\ 2\right)$

【解答６】<J114M32> 2008 杏林大学 2/1, 一次 医

❷〔答〕アイ　85　ウエオ　128　カ　3　キ　5

ク　1　ケ　2　コ　7　サ　4　シ　2　ス　2　セ　2

解 説 (1) 数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=2,\ a_{k+1}=2\sqrt{a_k}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定めれば，求める値は，$\log_8 a_8$ である．帰納的に $a_k>0$ だから，$a_{k+1}=2\sqrt{a_k}$ の両辺で，8を底とする対数をとると，

$$\log_8 a_{k+1}=\log_8 2\sqrt{a_k}=\log_8 2+\log_8 a_k^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log_8 a_k+\frac{1}{3}\qquad (\because\ \ 2=8^{\frac{1}{3}})$$

これを変形すると，

$$\log_8 a_{k+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(\log_8 a_k-\frac{2}{3}\right)$$

$\left\{\log_8 a_k-\dfrac{2}{3}\right\}$ は，初項 $\log_8 2-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列で

$$\log_8 a_8-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

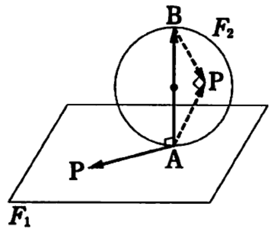
$$\therefore\ \ \log_8 a=\log_8 a_8=\frac{2^8-1}{3\cdot 2^7}=\frac{85}{128}$$

(2) $(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$\therefore\ \ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$



よって，P が描く図形 F_1 は，点Aを通って，$\overrightarrow{AB}$ に垂直な平面．

また，$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ は，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ と変形できて，定点 A，B に対し $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$ であるから，P が描く図形 F_2 は線分 AB を直径とする球面である．

点Aは，平面 F_1 上にあって，$\overrightarrow{AB}\perp F_1$ だから，球面 F_2 は，点Aで F_1 に接している．すなわち，F_1 と F_2 の共有点は，点Aのみである．

【解答７】<L114M14> 2010 杏林大学 1/22, １次 医

(a)	アイ　64	ウエ　65	オ　8	カキ　65
	クケ　65			
(b)	コ　8	サ　2	シ　1	ス　2
(c)	セ　4	ソ　3		
(d)	タチ　16	ツテ　25	ト　8	ナニ　25
	ヌ　5			

【解答８】<M114M13> 2011 杏林大学 1/21, １次 医

(a)	ア　2	イ　9	ウ　2	エ　7
	オ　2	カ　2	キ　4	ク　3
(b)	ケ　8	コ　6	サ　1	シ　4
	ス　1			
(c)	セソ　-1	タ　2	チ　0	
(d)	ツ　6	テト　-1	ナ　2	

【解答９】<N114M12> 2012 杏林大学 1/20, １次 医

(a)	ア　2	イ　2			
(b)	ウ　1	エ　5	オ　1	カ　5	キ　4
	ク　3	ケ　5	コ　1	サ　5	
(c)	シ　1	ス　2	セ　5	ソ　5	タ　⑦

【解答１０】<U114M13> 2018 杏林大学 1/19, １次(一般・東京都・茨城県地域枠) 医

(a)	ア　3	イウ　57	エ　2	オカ　-1	キ　0
(b)	ク　4	ケコ　25	サ　4		
(c)	シ　5	ス　1	セ　2		