第２章　集合・論理（数Ⅰ，Ⅰ講分）

Ａ問題

2-A-1　F25A

a，b は実数，n は自然数とする．次の命題の真偽を調べよ．

(1)　$a=5$ ならば $a^2=25$ である．

(2)　n が 2 の倍数ならば，n は 4 の倍数である．

(3)　$a^2>b^2$ ならば $a>b$ である．

(4)　ab が有理数ならば，a，b はともに有理数である．

(1)　真

(2)　偽　反例は「$n=2$」

(3)　偽　反例は「$(a,\ b)=(-2,\ -1)$」

(4)　偽　反例は「$(a,\ b)=(\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}-1)$」

2-A-2　F26A

全体集合 $U=\{n\,|\,1\leqq n\leqq 10,\ n$ は自然数$\}$ の部分集合 A，B について，

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 2,\ 5,\ 8\},\qquad A\cap B=\{3\},\qquad \overline{A}\cap B=\{4,\ 7,\ 10\}$$

がわかっている．このとき，A，B，$A\cap\overline{B}$ を求めよ．

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 2,\ 5,\ 8\}$ において，ド・モルガンの法則より，

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$$

であるから，

$$A\cup B=\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}.$$

これと，

$$\begin{cases} A\cap B=\{3\}, \\ \overline{A}\cap B=\{4,\ 7,\ 10\} \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} A=\{3,\ 6,\ 9\}, \\ B=\{3,\ 4,\ 7,\ 10\}. \end{cases}$$

したがって，

$$A\cap\overline{B}=\{6,\ 9\}.$$

2-A-3　F27A

赤球が 7 個，白球が 5 個，青球が 3 個入っている袋がある．この袋から最低何個を取り出せば，いずれかの色の球が 3 個以上その中に含まれるようにできるか．

6 個取り出すときであれば，赤球 2 個，白個 2 個，青球 2 個になり，条件に満たさない．

しかし，7 個取り出すと，(鳩の巣原理より) いずれかの色の球が 3 個となる．

したがって，最低 7 個の球を取り出せばよい．

B問題

2-B-1 F28B

次の命題の逆，裏，対偶を述べ，その真偽を調べよ．

「$x+y=5$ ならば $x=2$ かつ $y=3$」

逆「$x=2$ かつ $y=3$ ならば $x+y=5$」真

裏「$x+y\neq 5$ ならば $x\neq 2$ または $y\neq 3$」真

対偶「$x\neq 2$ または $y\neq 3$ ならば $x+y\neq 5$」偽

反例 $(x,\ y)=(1,\ 4)$

2-B-2 F29B

次の $\boxed{}$ に適するものを，下の (a)，(b)，(c)，(d) から選べ．

(a) 必要十分条件である．

(b) 必要条件であるが十分条件でない．

(c) 十分条件であるが必要条件でない．

(d) 必要条件でも十分条件でもない．

(1) n は自然数とする．n^2 を 3 で割ると余りが 1 であることは n を 3 で割ると余りが 1 であるための $\boxed{}$

(2) x，y は実数とする．$x=y=0$ は $x+y=0$ かつ $xy=0$ であるための $\boxed{}$

(3) x，y は実数とする．$x+y>0$ は $xy>0$ であるための $\boxed{}$

(4) a，b は実数とする．$b<0$ であることは，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもつための $\boxed{}$

(5) 四角形の対角線の長さが等しいことは四角形が長方形であるための $\boxed{}$

(1) 「n を 3 で割ると余りが 1 ならば n^2 を 3 で割ると 1 余る」は真であるが，「n^2 を 3 で割ると余りが 1 ならば n を 3 で割ると 1 余る」は偽である．反例は $n = 2$.

したがって，$\boxed{}$ に適するものは，

(b).

(2) 「$x = y = 0$ ならば $x + y = 0$ かつ $xy = 0$」は真であり，「$x + y = 0$ かつ $xy = 0$ ならば $x = y = 0$」も真である．

したがって，$\boxed{}$ に適するものは，

(a).

(3) 「$x + y > 0$ ならば $xy > 0$」は偽である．

反例は $(x,\ y) = (2,\ -1)$.

また，「$xy > 0$ ならば $x + y > 0$」は偽である．

反例は $(x,\ y) = (-2,\ -1)$.

したがって，$\boxed{}$ に適するものは，

(d).

(4) 「$b < 0$ ならば $x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもつ」は真であるが，「$x^2 + ax + b = 0$ が実数解をもつならば $b < 0$」は偽である．反例は $(a,\ b) = (3,\ 2)$.

したがって，$\boxed{}$ に適するものは，

(c).

(5) 「対角線の長さが等しいならば長方形」は偽である．反例は等脚台形．

また，「長方形ならば対角線の長さは等しい」は真である．

したがって，$\boxed{}$ に適するものは，

(b).

$\boxed{\textbf{2-B-3}}$ F30B

(1) n を自然数とするとき，n^2 が 7 の倍数ならば，n は 7 の倍数であることを証明せよ．

(2) $\sqrt{7}$ は無理数であることを証明せよ．

(3) 等式 $(2+3\sqrt{7})x+(1-5\sqrt{7})y=13$ を満たす有理数 x，y の値を求めよ．

(1) n を 7 で割ったときの商を q，余りを r とすると，

$$n=7q+r$$

であり，

$$r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

このとき，

$$\begin{aligned}n^2&=(7q+r)^2\\&=49q^2+14qr+r^2\\&=7(7q^2+2qr)+r^2\end{aligned}$$

であるから，n^2 を 7 で割った余りは，r^2 を 7 で割った余りと等しい．

さらに，

$$r^2=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36.$$

したがって，n^2 が 7 の倍数ならば，

$$r=0$$

であるから，

$$n=7q,$$

すなわち，n は 7 の倍数である．

(2) $\sqrt{7}$ が有理数であると仮定すると，

$$\sqrt{7}=\frac{q}{p}$$

を満たす互いに素である整数 p，q が存在する．

このとき，

$$\sqrt{7}p=q$$

であるから，

$$q^2=7p^2. \qquad \cdots ①$$

(1) より，q は 7 の倍数であるから，

$$q=7k \qquad \cdots ②$$

を満たす整数 k が存在する．

①，②より，

$$49k^2=7p^2$$

であるから，

$$p^2=7k^2.$$

(1) より，p は 7 の倍数である．

したがって，p，q はともに 7 の倍数であるが，これは互いに素であることに反する．

よって，$\sqrt{7}$ は無理数である．

(3) 等式 $(2+3\sqrt{7})x+(1-5\sqrt{7})y=13$ を変形すると，

$$2x+y-13+\sqrt{7}(3x-5y)=0.$$

x，y が有理数で，$\sqrt{7}$ が無理数であることから，

$$\begin{cases}2x+y-13=0,\\3x-5y=0.\end{cases}$$

これを解くと，

$$(x,\ y)=(5,\ 3).$$

C問題

2-C-1 F31C

1 から 1000 までの整数全体の集合を全体集合 U とし，その部分集合 A，B，C を

$$A = \{\, n \mid n \text{ は奇数，} \ n \in U \,\}$$

$$B = \{\, n \mid n \text{ は 3 の倍数でない，} \ n \in U \,\}$$

$$C = \{\, n \mid n \text{ は 18 の倍数でない，} \ n \in U \,\}$$

とする．このとき，$A \cup B \subset C$ であることを示せ．

集合 A，B，C の定め方より，

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{\, n \mid n \text{ は 6 の倍数} \,\}$$

$$\overline{C} = \{\, n \mid n \text{ は 18 の倍数} \,\}$$

であるから，

$$\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{C}.$$

これと，ド・モルガンの法則より，

$$\overline{A \cup B} \supset \overline{C}.$$

さらに，両辺の補集合を考えると，

$$A \cup B \subset C.$$

1-C-2　F8C　国立組のみ

次の(1)，(2)が成り立つことをそれぞれ証明せよ。

(1) 異なる$n+1$個の整数のうち，適当な２個を選べば，その差がnの倍数になることを証明せよ。

(2) 座標平面で，その座標がすべて整数であるような点を格子点という。座標平面上に５個の格子点が与えられたとき，そのうちの２点を結ぶ線分で中点がまた格子点となるものが少なくとも１つ存在することを証明せよ。

(1)　整数を n で割ったときの余りは，

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

のいずれかであるから，異なる $n+1$ 個の整数の中には，n で割ったときの余りが一致する２つの整数の組が少なくとも１つ存在する．

この２つの整数の差は n の倍数であるから，題意は示せた．

(2)　座標空間における格子点は，座標成分について考えると，

(偶数，偶数，偶数)

(偶数，偶数，奇数)

(偶数，奇数，偶数)

(奇数，偶数，偶数)

(偶数，奇数，奇数)

(奇数，偶数，奇数)

(奇数，奇数，偶数)

(奇数，奇数，奇数)

の８種類に分類できる．

したがって，９個の格子点を選ぶと，同じ種類となる２個の格子点の組が存在し，この２個の格子点の中点は格子点となるので，題意は示された．

1-C-3 (2)は，2004 年慶應大学・総合政策学部

(1) 命題：「$x^2 \leqq -1$ ならば $x \leqq -1$ である」 の真偽を判定せよ。

(2) 天使はつねに真実を述べ，悪魔はつねに嘘をつく。A，B は悪魔か天使であることはわかっているが，どちらかはっきりしない。A がこういった。「わたしが天使ならば，B も天使です。」この二人の正体は□である。□に当てはまるものを次の選択肢から選んで答えよ。

【選択肢】 1）A，B ともに天使　　2）A は天使，B は悪魔
3）A は悪魔，B は天使　　4）A,B ともに悪魔

(1) 真

(2) 選択肢(1)

演習問題

2-E-1

全体集合を $U=\{n \mid 1 \leqq n \leqq 6,\ n\text{は自然数}\}$ とし，U の部分集合 A，B を

$$A=\{a,\ a-3\},\qquad B=\{2,\ a+2,\ 9-2a\}$$

として，$A \cap B \neq \phi$，$2 \notin A$ のとき，a の値を定め，$\overline{A}$ を求めよ．

$a=4,\quad \overline{A}=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

2-E-2

次の $\boxed{}$ に適するものを，下の (a)，(b)，(c)，(d) から選べ．ただし，a，b，c はいずれも実数とする．

(a) 必要十分条件である．

(b) 必要条件であるが十分条件でない．

(c) 十分条件であるが必要条件でない．

(d) 必要条件でも十分条件でもない．

(1) $a^2>0$ であることは $a>0$ であるための $\boxed{}$

(2) $a=b$ であることは $ac=bc$ であるための $\boxed{}$

(3) $ab=0$ であることは $|a-b|=|a+b|$ であるための $\boxed{}$

(1) (b)　　(2) (c)　　(3) (a)