第２５章　数列の極限（数３，４講分）

A問題

25-A-1　F441A

一般項 a_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ.

(1) $a_n = 3n^2 - 2n^3$

(2) $a_n = \dfrac{3n^2 + 5n + 2}{n^2 + 3n + 2}$

(3) $a_n = \dfrac{3n - 4}{n^2 + 1}$

25-A-2　F442A

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{5n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n+7} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} (\sqrt{9n^2 + 4n} - 3n)$

25-A-3　F443A

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sin n\theta$

25-A-4　F449A

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{(-2)^n + 2 \cdot 5^n}{5^n + 2^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \{(-2)^n - 3^n\}$

25-A-5　F450A

数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとき，一般項 a_n を求め，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ.

25-A-6　F451A

数列 $\left\{\left(\dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2 - x + 2}\right)^n\right\}$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ.

25-A-7 F457A

次の無限級数の和を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

25-A-8 F458A

次の問に答えよ．

(1) 正の実数 x に対して，不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ が発散することを示せ．

25-A-9 F459A

次の無限級数の収束・発散を調べ，収束するものはその和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$

25-A-10 F465A

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{5^n}$

25-A-11 F466A

(1) 循環小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$ は，

$$0.\dot{1}2\dot{3}=0.123+0.123\times\frac{1}{10^3}+0.123\times\frac{1}{10^6}+\cdots$$

と表すことができる．このことを用いて，循環小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$ を既約分数の形で表せ．

(2) 循環小数 $1.2\dot{3}\dot{4}$ を既約分数の形で表せ．

25-A-12 F467A

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x(2-x)^{n-1}$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ．また，そのときの和を求めよ．

B問題

25-B-1 F444B

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(3n)^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n\right)$ ただし，$[x]$ は実数 x を越えない最大の整数を表すものとする．

25-B-2 F445B

n は自然数とする．不等式 $|x|+|y|\leqq n$ で表される領域に含まれ，x 座標，y 座標がともに整数である点の個数を a_n とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ を求めよ．

25-B-3 F446B

一般項 a_n が $a_n=\sqrt{(n-1)(4n-1)}+cn$ と表される数列 $\{a_n\}$ が収束するような定数 c の値を求めよ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

25-B-4 F452B

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=8$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+4}{a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

25-B-5 F453B

関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

25-B-6 F454B

数列 $\{a_n\}$ が $0<a_1<3$，$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．

(1) すべての自然数 n に対して，$0<a_n<3$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，$3-a_{n+1}<\dfrac{1}{3}(3-a_n)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

25-B-7 F460B

(1) 等式

$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+3}$$

が n についての恒等式となるような定数 a，b，c の値を求めよ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$ の収束・発散を調べ，収束すればその和を求めよ．

25-B-8 F461B

k，n は自然数とする．

(1) 不等式 $\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ を用いて，不等式

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\displaystyle\sqrt{n+1}-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{n}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}$ を求めよ．

25-B-9 F462B

$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ が成り立つ．このことを利用して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ の和を求めよ．

25-B-10 F468B

第 2 項が 3 である無限等比級数が収束し，その和が -4 であるとき，初項と公比を求めよ．

25-B-11 F469B

無限に続く正方形の列 T_1，T_2，T_3，$\cdots$，T_n，$\cdots$ があり，T_{n+1} は T_n に内接し，T_{n+1} の各頂点は T_n の各辺を 1 : 2 に内分している．

T_1 の一辺の長さが 1 のとき，すべての正方形の面積の和を求めよ．

25-B-12 F470B

n は自然数とする．

(1) 不等式 $n!\geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<3$ が成り立つことを示せ．