第２５章　数列の極限（数３，４講分）

A問題

25-A-1　F441A

一般項 a_n が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ．

(1) $a_n = 3n^2 - 2n^3$

(2) $a_n = \dfrac{3n^2+5n+2}{n^2+3n+2}$

(3) $a_n = \dfrac{3n-4}{n^2+1}$

(1) $a_n = 3n^2 - 2n^3$ より，

$$a_n = -n^3\left(2 - \frac{3}{n}\right)$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散する．

(2) $a_n = \dfrac{3n^2+5n+2}{n^2+3n+2}$ より，

$$a_n = \frac{3+\dfrac{5}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は 3 に収束する．

(3) $a_n = \dfrac{3n-4}{n^2+1}$ より，

$$a_n = \frac{\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する．

25-A-2 F442A

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+7}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+4n}-3n)$

(1) 分母，分子を n で割る．

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}$$

$$=\frac{5}{2}.$$

(2) 分母，分子ともに有理化する．

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(n+7)-(n+3)\}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\{(n+2)-n\}(\sqrt{n+7}+\sqrt{n+3})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\dfrac{7}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}}$$

$$=2.$$

(3) 有理化する．

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{(9n^2+4n)-(3n)^2}{\sqrt{9n^2+4n}+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{9n^2+4n}+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{9+\dfrac{4}{n}}+3}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

25-A-3 F443A

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$

(1) $-1 \leqq (-1)^n \leqq 1$ であるから，

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{(-1)^n}{n} \leqq \frac{1}{n}. \qquad \cdots ①$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0. \qquad \cdots ②$$

①，②と，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$$

(2) $-1 \leqq \sin n\theta \leqq 1$ であるから，

$$-\frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n}\sin n\theta \leqq \frac{1}{n}. \qquad \cdots ①$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0. \qquad \cdots ②$$

①，②と，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta=0.$$

25-A-4 F449A

次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+2\cdot 5^n}{5^n+2^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{(-2)^n-3^n\}$

(1) $-1<\dfrac{7}{8}<1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n=0.$$

(2) 分母，分子を 5^n で割る．

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{5}\right)^n+2}{1+2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$=2.$$

(3) 3^n をくくり出す．

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n-1\right\}$$

$$=-\infty.$$

$\boxed{\textbf{25-A-5}}$ F450A

数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとき，一般項 a_n を求め，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

$a_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + 1$ を変形すると,

$$a_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{3}{2}\right)$$

であるから,

$$a_n - \frac{3}{2} = \left(a_1 - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

$a_1 = 1$ より,

$$a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

したがって,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}.$$

25-A-6 F451A

数列 $\left\{\left(\dfrac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}\right)^n\right\}$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ．

数列 $\left\{\left(\dfrac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}\right)^n\right\}$ が収束する条件は，

$$-1<\frac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}\leqq 1. \qquad \cdots ①$$

①において，

$$x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

であるから，①は，

$$-(x^2-x+2)<x^2-2x-7\leqq x^2-x+2.$$

したがって，

$$\begin{cases} -(x^2-x+2)<x^2-2x-7, & \cdots ② \\ x^2-2x-7\leqq x^2-x+2. & \cdots ③ \end{cases}$$

②より，

$$2x^2-3x-5>0$$

であるから，

$$(2x-5)(x+1)>0$$

$$x<-1,\quad \frac{5}{2}<x. \qquad \cdots ④$$

また，③より，

$$-x\leqq 9$$

であるから，

$$x\geqq -9. \qquad \cdots ⑤$$

④かつ⑤より，求める x の値の範囲は，

$$-9\leqq x<-1,\quad \frac{5}{2}<x.$$

25-A-7 F457A

次の無限級数の和を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

(1) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ とすると，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

であるから，求める和は，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}$ とすると，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

であるから，求める和は，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}.$$

25-A-8 F458A

次の問に答えよ．

(1) 正の実数 x に対して，不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ が発散することを示せ．

(1) $\sqrt{x} > 0$，$\sqrt{x+1} > 0$ であるから，

$$0 < \sqrt{x} < \sqrt{x+1} + \sqrt{x}.$$

これより，

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(2) (1) より，自然数 k に対して，

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$$

が成り立つから，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}. \qquad \cdots ①$$

また，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$
$$= \sqrt{n+1} - 1$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - 1)$$
$$= \infty. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$$

であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ は発散する．

25-A-9 F459A

次の無限級数の収束・発散を調べ，収束するものはその和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$

(1) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$ とすると，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

であるから，級数は収束して，その和は，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ とすると，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

であるから，級数は収束して，その和は，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

(3) すべての自然数 n に対して，

$$\frac{1}{5} < \frac{n}{3n+1}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5} < \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3k+1}. \qquad \cdots ①$$

また，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}n$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5} = \infty. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3k+1} = \infty$$

であるから，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$ は発散する．

25-A-10 F465A

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-(-2)^n}{5^n}$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ は初項 5，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数であり，

$$-1<-\frac{1}{3}<1$$

であるから，この無限級数は収束し，その和は，

$$\frac{5}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{15}{4}.$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(-\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

ここで，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

は初項 $\dfrac{3}{5}$，公比 $\dfrac{3}{5}$ の無限等比級数であり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$$

は初項 $-\dfrac{2}{5}$，公比 $-\dfrac{2}{5}$ の無限等比級数であり，どちらの級数の公比の絶対値が 1 より小さいので，この 2 つの無限級数はともに収束する．

したがって，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{5^n}$ は収束し，その和は，

$$\frac{\dfrac{3}{5}}{1-\dfrac{3}{5}}-\frac{-\dfrac{2}{5}}{1-\left(-\dfrac{2}{5}\right)}=\frac{3}{2}+\frac{2}{7}$$

$$=\frac{25}{14}.$$

25-A-11 F466A

(1) 循環小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$ は，

$$0.\dot{1}2\dot{3} = 0.123 + 0.123 \times \frac{1}{10^3} + 0.123 \times \frac{1}{10^6} + \cdots$$

と表すことができる．このことを用いて，循環小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$ を既約分数の形で表せ．

(2) 循環小数 $1.2\dot{3}\dot{4}$ を既約分数の形で表せ．

(1)
$$0.\dot{1}2\dot{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{123}{1000}\left(\frac{1}{10^3}\right)^{n-1}$$

であり，これは初項 $\dfrac{123}{1000}$，公比 $\dfrac{1}{10^3}$ の無限等比級数であるから，

$$\begin{aligned} 0.\dot{1}2\dot{3} &= \frac{\dfrac{123}{1000}}{1-\dfrac{1}{10^3}} \\ &= \frac{123}{999} \\ &= \frac{41}{333}. \end{aligned}$$

(2)
$$1.2\dot{3}\dot{4} = 1.2 + 0.034 + 0.00034 + 0.0000034 + \cdots$$

であるから，

$$1.2\dot{3}\dot{4} = 1.2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{34}{1000}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}.$$

ここで，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{34}{1000}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}$$

は初項 $\dfrac{34}{1000}$，公比 $\dfrac{1}{10^2}$ の無限等比級数であるから，

$$\begin{aligned} 1.2\dot{3}\dot{4} &= 1.2 + \frac{\dfrac{34}{1000}}{1-\dfrac{1}{10^2}} \\ &= \frac{12}{10} + \frac{34}{990} \\ &= \frac{1222}{990} \\ &= \frac{611}{495}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{25-A-12}}$ F467A

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x(2-x)^{n-1}$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ．また，そのときの和を求めよ．

$\sum_{n=1}^{\infty} x(2-x)^{n-1}$ は初項 x，公比 $2-x$ の無限等比級数であるから，収束条件は，

$$x=0 \text{ または } -1<2-x<1.$$

これより，無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x(2-x)^{n-1}$ が収束するような x の値の範囲は，

$$x=0,\quad 1<x<3.$$

$x=0$ のとき，和は，

$$0.$$

また，$1<x<3$ のとき，和は，

$$\frac{x}{1-(2-x)}=\frac{x}{x-1}.$$

したがって，求める和は，

$$\frac{x}{x-1}.$$

B問題

25-B-1 F444B

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(3n)^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n\right)$ ただし, $[x]$ は実数 x を越えない最大の整数を表すものとする.

(1)
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$
であるから,
$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

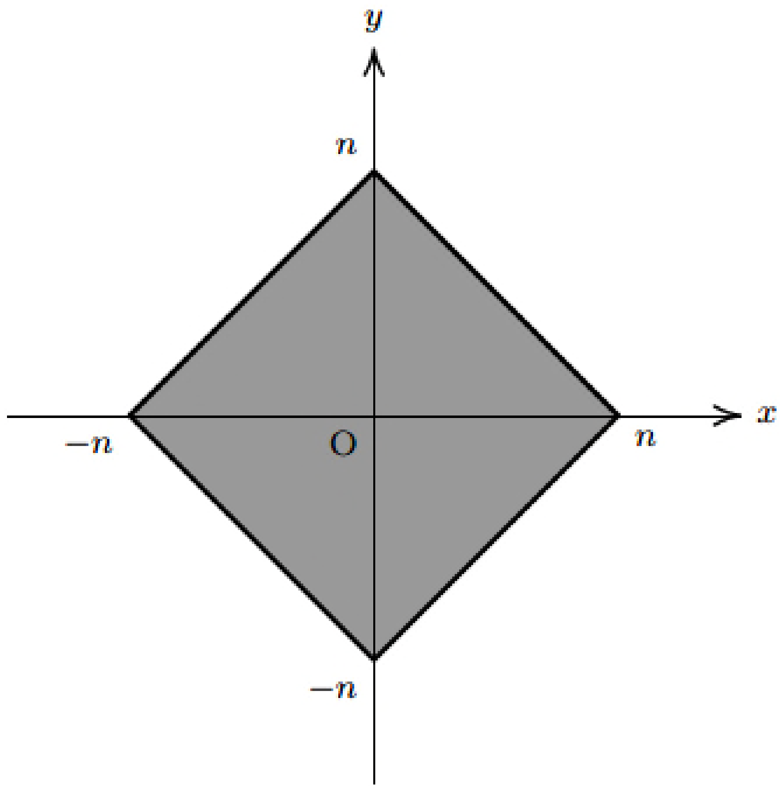
(2)
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
であり,
$$\begin{aligned}&(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(3n)^2\\&=\sum_{k=1}^{3n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\frac{1}{6}\cdot 3n(3n+1)(6n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$
であるから,
$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}\cdot 3n(3n+1)(6n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3(3n+1)(6n+1)-(n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(6+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}-1\right\}\\&=26.\end{aligned}$$

(3) 記号の定め方より,
$$\left[\frac{n}{2}\right]\leqq\frac{n}{2}<\left[\frac{n}{2}\right]+1$$
であるから,
$$\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right]\leqq\frac{n}{2}.$$
これより,
$$-\frac{n}{2}\leqq-\left[\frac{n}{2}\right]<-\frac{n}{2}+1$$
であるから,
$$\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}-n\leqq\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n<\sqrt{n^2-\frac{n}{2}+1}-n. \quad \cdots ①$$
また,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}-n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{2}}{\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2n}}+1}\\&=-\frac{1}{4}. \quad \cdots ②\end{aligned}$$
さらに,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\frac{n}{2}+1}-n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{2}+1}{\sqrt{n^2-\frac{n}{2}+1}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n^2}}+1}\\&=-\frac{1}{4}. \quad \cdots ③\end{aligned}$$
①, ②, ③と, はさみうちの原理より,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n\right)=-\frac{1}{4}.$$

25-B-2 F445B

n は自然数とする．不等式 $|x|+|y| \leqq n$ で表される領域に含まれ，x 座標，y 座標がともに整数である点の個数を a_n とする．極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n^2}$ を求めよ．

不等式 $|x|+|y| \leqq n$ で表される領域を図示すると，次の図の網目部分である．



直線 $x=k$ ($k=0$, 1, 2, $\cdots$, n) 上の格子点の個数は，

$$(-k+n)-(k-n)+1=-2k+2n+1 \text{ 個}$$

であるから，対称性を考慮すると，

$$\begin{aligned} a_n &= 2n+1+2\sum_{k=1}^{n}(-2k+2n+1) \\ &= 2n+1+2\left\{-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n(2n+1)\right\} \\ &= 2n^2+2n+1. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

25-B-3 F446B

一般項 a_n が $a_n=\sqrt{(n-1)(4n-1)}+cn$ と表される数列 $\{a_n\}$ が収束するような定数 c の値を求めよ．また，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-1)(4n-1)}+cn\}$ が収束するためには，$c<0$ が必要である．

このとき，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(4n-1)-(cn)^2}{\sqrt{(n-1)(4n-1)}-cn}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(4-c^2)n^2-5n+1}{\sqrt{(n-1)(4n-1)}-cn}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(4-c^2)n-5+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(4-\dfrac{1}{n}\right)}-c}.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)}-c\right\}=2-c
$$

であるから，題意が成り立つには，

$$
(4-c^2)n-5+\frac{1}{n}
$$

が収束することが必要である．

したがって，

$$
4-c^2=0
$$

であり，$c<0$ であるから，

$$
c=-2.
$$

このとき，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{-5+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(4-\dfrac{1}{n}\right)}+2}\\
&= -\frac{5}{4}.
\end{aligned}
$$

25-B-4 F452B

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=8$, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+4}{a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする.

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき, b_{n+1} を b_n を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

(1) b_n の定め方より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}-2} \\ &= \frac{1}{\dfrac{3a_n+4}{a_n+3}-2} \\ &= \frac{a_n+3}{(3a_n+4)-2(a_n+3)} \\ &= \frac{a_n+3}{a_n-2} \\ &= \frac{5}{a_n-2}+1 \end{aligned}$$

であるから,

$$b_{n+1}=5b_n+1.$$

(2) (1) の結果を変形すると,

$$b_{n+1}+\frac{1}{4}=5\left(b_n+\frac{1}{4}\right)$$

であるから,

$$b_n+\frac{1}{4}=\left(b_1+\frac{1}{4}\right)5^{n-1}.$$

さらに, $a_1=8$ より,

$$b_1=\frac{1}{6}$$

であるから,

$$\begin{aligned} b_n+\frac{1}{4} &= \frac{5}{12}\cdot 5^{n-1} \\ b_n &= \frac{5^n}{12}-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

また, $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ より,

$$a_n=\frac{1}{b_n}+2$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\dfrac{5^n}{12}-\dfrac{1}{4}}+2 \\ &= \frac{12}{5^n-3}+2. \end{aligned}$$

これより,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2.$$

25-B-5 F453B

関数 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

x の値で場合分けをして，$f(x)$ を求める．

(i) $-1<x<1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$$

であるから，

$$f(x)=x^2+x.$$

(ii) $x=1$ のとき，

$$f(x)=\frac{3}{2}.$$

(iii) $x=-1$ のとき，

$$(-1)^{2n-1}=-1,\quad (-1)^{2n}=1$$

であるから，

$$f(x)=-\frac{1}{2}.$$

(iv) $x<-1,\ 1<x$ のとき，

$$-1<\frac{1}{x}<1$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}=0.$$

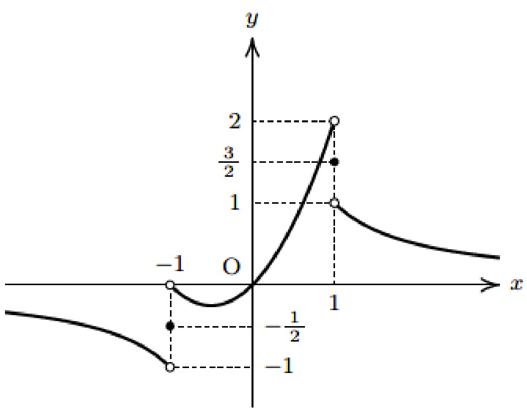
したがって，

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+x^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n}+x\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n}}$$

$$=\frac{1}{x}.$$

以上より，

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & (-1<x<1\text{のとき}),\\ \dfrac{3}{2} & (x=1\text{のとき}),\\ -\dfrac{1}{2} & (x=-1\text{のとき}),\\ \dfrac{1}{x} & (x<-1,\ \ 1<x\text{のとき}). \end{cases}$$



25-B-6 F454B

数列 $\{a_n\}$ が $0<a_1<3$，$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．

(1) すべての自然数 n に対して，$0<a_n<3$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，$3-a_{n+1}<\dfrac{1}{3}(3-a_n)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(1)　すべての自然数 n に対して，

$$0<a_n<3 \qquad \cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，

$$0<a_1<3$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

(Ⅱ)　$n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する，すなわち，

$$0<a_k<3$$

であるとする．

このとき，

$$1<\sqrt{1+a_k}<2$$

であるから，

$$2<1+\sqrt{1+a_k}<3.$$

したがって，

$$0<a_{k+1}<3$$

であるから，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．

(2)　$I_n=\dfrac{3-a_{n+1}}{3-a_n}$ とすると，

$$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$$

より，

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{3-(1+\sqrt{1+a_n})}{3-a_n}\\&=\frac{2-\sqrt{1+a_n}}{3-a_n}\\&=\frac{4-(1+a_n)}{(3-a_n)(2+\sqrt{1+a_n})}\\&=\frac{1}{2+\sqrt{1+a_n}}.\end{aligned} \qquad \cdots ①$$

ここで，(1) より，

$$3<2+\sqrt{1+a_n}<4$$

であるから，

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{2+\sqrt{1+a_n}}<\frac{1}{3}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$I_n<\frac{1}{3}$$

であるから，

$$\frac{3-a_{n+1}}{3-a_n}<\frac{1}{3}.$$

さらに，$a_n<3$ であるから，

$$3-a_{n+1}<\frac{1}{3}(3-a_n).$$

(3)　(2) より，すべての自然数 n に対して，

$$0<I_n<\frac{1}{3}.$$

$n\geqq 2$ のとき，

$$0<I_1I_2I_3\cdots I_{n-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \qquad \cdots ③$$

また，

$$I_1I_2I_3\cdots I_{n-1}=\frac{3-a_n}{3-a_1}. \qquad \cdots ④$$

③，④より，

$$0<\frac{3-a_n}{3-a_1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

であるから，$a_1<3$ より，

$$0<3-a_n<(3-a_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \qquad \cdots ⑤$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}(3-a_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0. \qquad \cdots ⑥$$

⑤，⑥と，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(3-a_n)=0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=3.$$

25-B-7 F460B

(1) 等式

$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+3}$$

が n についての恒等式となるような定数 a, b, c の値を求めよ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$ の収束・発散を調べ, 収束すればその和を求めよ.

(1)
$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+3} \qquad \cdots ①$$
の両辺に $n(n+1)(n+3)$ を掛けると,
$$1=a(n+1)(n+3)+bn(n+3)+cn(n+1). \qquad \cdots ②$$
ここで,
$$\begin{aligned}(②\text{の右辺})&=a(n^2+4n+3)+b(n^2+3n)+c(n^2+n)\\&=(a+b+c)n^2+(4a+3b+c)n+3a\end{aligned}$$
であるから, ①が n についての恒等式となる条件は,
$$\begin{cases}a+b+c=0,\\4a+3b+c=0,\\3a=1.\end{cases}$$
これより,
$$\begin{cases}b+c=-\dfrac{1}{3},\\3b+c=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$
であるから,
$$b=-\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{6}.$$
以上より, 求める a, b, c の値は,
$$a=\frac{1}{3},\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{6}.$$

(2) (1) の結果より,
$$\begin{aligned}&\frac{1}{n(n+1)(n+3)}\\&=\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}+\frac{1}{n+3}\right)\\&=\frac{1}{6}\left\{2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\end{aligned}$$
であるから,
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}$$
とすると,
$$S_n=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right). \qquad \cdots ①$$
また,
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}. \qquad \cdots ②$$
さらに,
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}. \qquad \cdots ③$$
①, ②, ③より,
$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
であるから,
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{7}{36}.\end{aligned}$$
したがって, 級数は収束して, その和は,
$$\frac{7}{36}.$$

25-B-8　F461B

k，n は自然数とする．

(1) 不等式 $\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ を用いて，不等式

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\sqrt{n+1}-1<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{n}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}$ を求めよ．

(1)
$$\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$$

の逆数をとると，

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}. \qquad \cdots ①$$

また，

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}$$
$$=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}. \qquad \cdots ②$$

さらに，

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{k-(k-1)}$$
$$=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}. \qquad \cdots ③$$

①，②，③より，

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}. \qquad \cdots ④$$

(2) ④より，

$$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}). \qquad \cdots ⑤$$

また，

$$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{n+1}-1. \qquad \cdots ⑥$$

さらに，

$$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=\sqrt{n}. \qquad \cdots ⑦$$

⑤，⑥，⑦より，

$$\sqrt{n+1}-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{n}. \qquad \cdots ⑧$$

(3) ⑧より，

$$\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}<2. \qquad \cdots ⑨$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$$
$$=2. \qquad \cdots ⑩$$

⑨，⑩と，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}=2.$$

25-B-9 F462B

$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ が成り立つ．このことを利用して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ の和を求めよ．

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ とすると，

$$S_n=1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \qquad \cdots ①$$

①より，

$$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}. \qquad \cdots ②$$

① − ② より，

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S_n&=1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

したがって，

$$S_n=\frac{9}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-\frac{3}{2}n\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

これと $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ であることから，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}&=\lim_{n\to\infty} S_n\\&=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

25-B-10 F468B

第 2 項が 3 である無限等比級数が収束し，その和が -4 であるとき，初項と公比を求めよ．

初項を a，公比を r とすると，第 2 項が 3 であるから，

$$ar = 3. \qquad \cdots ①$$

また，無限等比級数が収束する条件は，

$$a = 0 \text{ または } -1 < r < 1. \qquad \cdots ②$$

さらに，和が -4 であることから，

$$\frac{a}{1-r} = -4. \qquad \cdots ③$$

③より，

$$a = -4(1-r). \qquad \cdots ④$$

①に代入すると，

$$-4r(1-r) = 3$$

であるから，

$$4r^2 - 4r - 3 = 0$$

$$(2r+1)(2r-3) = 0$$

$$r = -\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}.$$

②より，

$$r = -\frac{1}{2}.$$

④より，

$$a = -6.$$

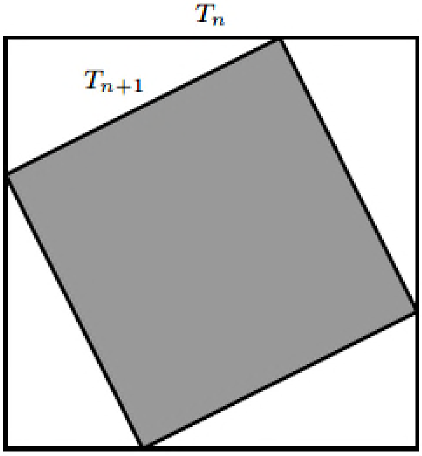
以上より，求める初項は -6，公比は $-\dfrac{1}{2}$ である．

25-B-11 F469B

無限に続く正方形の列 T_1，T_2，T_3，$\cdots$，T_n，$\cdots$ があり，T_{n+1} は T_n に内接し，T_{n+1} の各頂点は T_n の各辺を 1 : 2 に内分している．

T_1 の一辺の長さが 1 のとき，すべての正方形の面積の和を求めよ．

T_n と T_{n+1} を図示すると，次のようになる．



ここで，T_n の一辺の長さを l_n とすると，

$$l_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}l_n\right)^2 + \left(\frac{2}{3}l_n\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}l_n$$

であり，$l_1 = 1$ であるから，

$$l_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}.$$

したがって，T_n の面積を S_n とすると，

$$S_n = {l_n}^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}.$$

よって，すべての正方形の面積の和 S は，

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}.$$

S は初項 1，公比 $\frac{5}{9}$ の無限等比級数であるから，収束して，

$$S = \frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \frac{9}{4}.$$

25-B-12 F470B

n は自然数とする．

(1) 不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}<3$ が成り立つことを示せ．

(1) すべての自然数 n に対して，

$$n! \geqq 2^{n-1} \qquad \cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(I) $n=1$ のとき，

$$((*)\text{ の左辺}) = 1,$$

$$((*)\text{ の右辺}) = 1$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

(II) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する，すなわち，

$$k! \geqq 2^{k-1} \qquad \cdots ①$$

であるとする．

①の両辺に $(k+1)$ を掛けると，

$$(k+1)! \geqq (k+1)2^{k-1}. \qquad \cdots ②$$

また，$k \geqq 1$ のとき，

$$(k+1)2^{k-1}-2^k=(k-1)2^{k-1} \geqq 0$$

であるから，

$$(k+1)2^{k-1} \geqq 2^k. \qquad \cdots ③$$

②，③より，

$$(k+1)! \geqq 2^k$$

であるから，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．

(2)
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$
とすると，数列 $\{S_n\}$ は単調増加数列である．

また，(1) より，自然数 k に対して，

$$\frac{1}{k!} \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

が成り立つから，

$$S_n \leqq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad \cdots ④$$

ここで，④の右辺は，初項 1，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列の和であるから，単調に増加する．

さらに，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2.$$

以上より，

$$S_n<2$$

であるから，

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3.$$

C問題

25-C-1 F447C

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ について，次の事柄は正しいか．正しくないものは，その反例をあげよ．ただし，α，β は定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ である．

(3) $b_n < a_n < c_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = 0$ ならば，数列 $\{a_n\}$ は収束する．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である．

(1) 正しくない．

$$(\text{反例})\quad a_n = n, \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

(2) 正しくない．

$$(\text{反例})\quad a_n = \frac{2}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n}$$

(3) 正しくない．

$$(\text{反例})\quad a_n = n + \frac{1}{2n}, \qquad b_n = n, \qquad c_n = n + \frac{1}{n}$$

(4) 正しい．

25-C-2 F448C

n を正の整数とし，放物線 $y=n-x^2$ と x 軸で囲まれる領域 D を考える．D に含まれ，x，y の値がともに整数である点の個数を $a(n)$ とする．

(1) $\sqrt{n}$ を越えない最大の整数を k とする．$a(n)$ を k と n の多項式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$ を求めよ．

(1) 直線 $x=l$ ($l=0$, ±1, ±2, $\cdots$, $\pm k$) 上の格子点の個数は，

$$n-l^2+1\text{ 個}$$

であるから，対称性より，

$$\begin{aligned}a(n)&=n+1+2\sum_{l=1}^{k}(n-l^2+1)\\&=n+1+2\left\{k(n+1)-\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\right\}\\&=(n+1)(2k+1)-\frac{1}{3}k(k+1)(2k+1).\end{aligned}$$

(2) k の定め方より，

$$k\leqq\sqrt{n}<k+1$$

であるから，

$$1-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{k}{\sqrt{n}}\leqq1. \qquad \cdots ①$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1. \qquad \cdots ②$$

①，②と，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{\sqrt{n}}=1.$$

したがって，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2\cdot\frac{k}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{3}\cdot\frac{k}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(2\cdot\frac{k}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}\\&=2-\frac{2}{3}\\&=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

25-C-3 F455C

(1) $h>0$ のとき，すべての自然数 n に対して，$(1+h)^n \geqq 1+nh+\dfrac{1}{2}n(n-1)h^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$ を求めよ．

(1)
$$(1+h)^n \geqq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2 \qquad \cdots ①$$
が成り立つことを n の値で場合分けをして示す．

(i) $n=1$ のとき，①の両辺はともに，
$$1+h$$
であるから，①は成り立つ．

(ii) $n \geqq 2$ のとき，二項定理より，
$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k h^k$$
であるから，
$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k h^k \geqq 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2.$$
よって，①は成り立つ．

以上より，任意の自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．

(2) ①において，$h=2$ とすると，
$$3^n \geqq 1+2n+2n(n-1)$$
であるから，
$$3^n \geqq 1+2n^2.$$
これより，
$$0<\frac{1}{3^n} \leqq \frac{1}{1+2n^2}$$
であるから，
$$0<\frac{n}{3^n} \leqq \frac{n}{1+2n^2}. \qquad \cdots ②$$
ここで，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{n}+2n}$$
$$=0$$
であるから，②と，はさみうちの原理より，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0.$$

25-C-4 F456C

放物線 $y=x^2-2$ 上の点 $(x_n,\ {x_n}^2-2)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を x_{n+1} とする．このようにして，x_1 から順に x_2，x_3，x_4，$\cdots$ を作る．ただし，$x_1>\sqrt{2}$ とする．

(1) すべての自然数 n に対して，$\sqrt{2}<x_{n+1}<x_n$ が成り立つことを示せ．

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(1) $y=x^2-2$ より，

$$y'=2x$$

であるから，点 $(x_n,\ {x_n}^2-2)$ における接線の方程式は，

$$y=2x_n(x-x_n)+{x_n}^2-2. \qquad \cdots ①$$

①と x 軸の交点が点 $(x_{n+1},\ 0)$ であるから，

$$0=2x_n(x_{n+1}-x_n)+{x_n}^2-2.$$

これより，

$$2x_nx_{n+1}={x_n}^2+2$$

であり，この式において $x_n\neq 0$ であるから，

$$x_{n+1}=\frac{{x_n}^2+2}{2x_n}. \qquad \cdots ②$$

すべての自然数 n に対して，

$$x_n>\sqrt{2} \qquad \cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(I) $n=1$ のとき，

$$x_1>\sqrt{2}$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

(II) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する，すなわち，

$$x_k>\sqrt{2}$$

であるとする．

このとき，②より，

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right). \qquad \cdots ③$$

また，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)\geqq\sqrt{x_k\cdot\frac{2}{x_k}}$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)\geqq\sqrt{2}. \qquad \cdots ④$$

(等号が成り立つは $x_k=\sqrt{2}$ のとき)

③，④より，

$$x_{k+1}>\sqrt{2}$$

であるから，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．

さらに，②より，

$$\begin{aligned}x_n-x_{n+1}&=x_n-\frac{{x_n}^2+2}{2x_n}\\&=\frac{{x_n}^2-2}{2x_n}\end{aligned}$$

であり，$(*)$ より，

$$\frac{{x_n}^2-2}{2x_n}>0$$

であるから，

$$x_n-x_{n+1}>0,$$

すなわち，

$$x_{n+1}<x_n. \qquad \cdots ⑤$$

$(*)$ と⑤より，

$$\sqrt{2}<x_{n+1}<x_n.$$

(2) ②より，

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}&=\frac{\dfrac{{x_n}^2+2}{2x_n}-\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}\\&=\frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n(x_n-\sqrt{2})}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{x_n}\right).\end{aligned} \qquad \cdots ⑥$$

また，$(*)$ より，

$$0<\frac{\sqrt{2}}{x_n}<1$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{x_n}\right)<\frac{1}{2}. \qquad \cdots ⑦$$

⑥，⑦より，

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_n-\sqrt{2}}<\frac{1}{2}$$

であるから，$(*)$ より，

$$0<x_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(x_n-\sqrt{2}).$$

これより，

$$0<x_n-\sqrt{2}<(x_1-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad \cdots ⑧$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}(x_1-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0. \qquad \cdots ⑨$$

⑧，⑨と，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-\sqrt{2})=0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}.$$

25-C-5 Ｆチャレ 57　2003 大阪市立大学

p，q は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする．自然数 n に対して，有理数 a_n，b_n を $(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$ によって定める．

(1) $(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$ を示せ．

(1)
$$(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q} \qquad \cdots ①$$
において，$n=1$ とすると，
$$p+\sqrt{q} = a_1 + b_1\sqrt{q}.$$
ここで，p，a_1，b_1 が有理数，$\sqrt{q}$ が無理数であるから，
$$a_1 = p,\quad b_1 = 1. \qquad \cdots ②$$
また，①より，
$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{q} &= (p+\sqrt{q})^{n+1} \\ &= (p+\sqrt{q})(a_n+b_n\sqrt{q}) \\ &= pa_n+qb_n+(a_n+pb_n)\sqrt{q} \end{aligned}$$
であるから
$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{q} = pa_n+qb_n+(a_n+pb_n)\sqrt{q}.$$
これより，
$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n+qb_n, \\ b_{n+1} = a_n+pb_n. \end{cases} \qquad \cdots ③$$
すべての自然数 n に対して，
$$(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q} \qquad \cdots (*)$$
であることを数学的帰納法を用いて示す．

(Ⅰ) $n=1$ のとき，②より，
$$a_1 - b_1\sqrt{q} = p-\sqrt{q}$$
であるから，$(*)$ は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する，すなわち，
$$(p-\sqrt{q})^k = a_k - b_k\sqrt{q} \qquad \cdots ④$$
であるとする．

このとき，④より，
$$\begin{aligned} (p-\sqrt{q})^{k+1} &= (p-\sqrt{q})(p-\sqrt{q})^k \\ &= (p-\sqrt{q})(a_k-b_k\sqrt{q}) \\ &= pa_k+qb_k-(a_k+pb_k)\sqrt{q} \end{aligned}$$
であるから，③より，
$$(p-\sqrt{q})^{k+1} = a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{q}.$$
したがって，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．

(2) $(*)$，①より，
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n\}, \\ b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{q}}\{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n\} \end{cases}$$
であるから，
$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \sqrt{q}\cdot\frac{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n}{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n} \\ &= \sqrt{q}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}{1-\left(\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}. \end{aligned} \qquad \cdots ⑤$$

ここで，
$$-1 < \frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}} < 1$$
であるから，⑤より，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}.$$

25-C-6 F463C

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ ならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 1$ であることを証明せよ．

部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1})$ について考える．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + (n-1)(a_{n-1} - a_n) + n(a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n - na_{n+1} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} - (n+1)a_{n+1}\end{aligned}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1)a_{n+1}.$$

ここで，条件より，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} a_k = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (n+1)a_{n+1} = 0$$

であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ は収束し，その和は，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = 1.$$

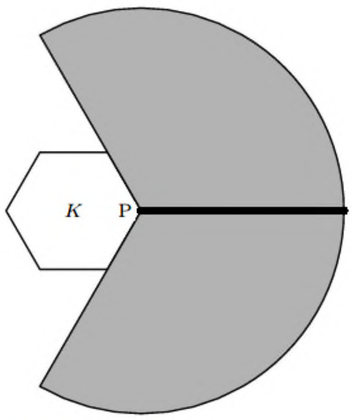
25-C-7 F464C

n を 2 以上の整数とし，周囲の長さが 2 の正 $2n$ 角形 K と，K の 1 つの頂点 P を考える．

(1) K と同じ平面上で，P を一端とする長さ 1 の棒を K の内部を通らないようにして動かす．棒が通ることができる点全体からなる図形の面積を求めよ．

(2) K と同じ平面上で，P を一端とする長さ 1 のひもを K の内部を通らないようにして動かす．ひもが通過し得る領域の面積を S_n として，極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(1) 棒が通ることができる点全体からなる図形は次の図の網目部分である．



ここで，正 $2n$ 角形の 1 つの外角の大きさは，

$$\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$$

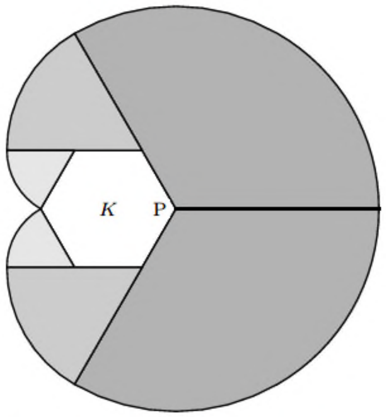
であるから，斜線部分の図形は，半径 1，中心角 $\pi + \dfrac{\pi}{n}$ の扇形である．

したがって，求める面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

(2) K の周囲の長さが 2 であり，ひもの長さが 1 であるから，ひもの長さは K の周囲の長さの半分である．

これより，ひもが通過し得る領域は次の図の網目部分である．



(1) の棒が通ることができる点全体以外の部分は，中心角が $\dfrac{\pi}{n}$ の $2(n-1)$ 個の扇形である．

さらに，正 $2n$ 角形の一辺の長さが $\dfrac{1}{n}$ であることから，扇形の半径は大きい方から，

$$\frac{n-1}{n},\ \frac{n-2}{n},\ \cdots,\ \frac{3}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{1}{n}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
S_n &= 2\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{\pi}{n}\right\} + \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{\pi}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{5}{6}\pi.$$

25-C-8 F471C

極限値 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\cos\frac{2}{3}n\pi$ を求めよ．

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7^k}\cos\frac{2}{3}k\pi$ において，整数 m を用いて，

$$\cos\frac{2}{3}k\pi = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & (k = 3m-2 \text{ のとき}), \\ -\dfrac{1}{2} & (k = 3m-1 \text{ のとき}), \\ 1 & (k = 3m \text{ のとき}). \end{cases}$$

これより，

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{7^k}\cos\frac{2}{3}k\pi \\ &= \sum_{m=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7^{3m-2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7^{3m-1}} + \frac{1}{7^{3m}}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{7^{3m}}\left(-\frac{7^2}{2} - \frac{7}{2} + 1\right) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\left\{-27\left(\frac{1}{7^3}\right)^m\right\} \\ &= -\frac{27}{7^3}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{7^3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{7^3}} \\ &= -\frac{3}{38}\left\{1-\left(\frac{1}{343}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = -\frac{3}{38}.$$

また，

$$S_{3n-1} = S_{3n} - \frac{1}{7^{3n}},$$
$$S_{3n-2} = S_{3n} - \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7^{3n-1}}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{3n-2} = -\frac{3}{38}.$$

以上より，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\cos\frac{2}{3}n\pi = -\frac{3}{38}.$$

25-C-9 F472C

(1) n 桁の自然数のうち，各位の数字がすべて 1 と異なるものの個数を求めよ．

(2) 自然数の逆数からなる級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}+\cdots$$

から，分母に数字 1 が現れる項をすべて除いて得られる級数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{20}+\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\cdots$$

の和は 40 を越えないことを示せ．

(1) 最高位の数は 0 と 1 以外の 8 通りあり，それ以外の位の数はそれぞれ 9 通りずつあるから，条件を満たすものの個数は，

$$8\cdot 9^{n-1} \text{ 個.}$$

(2) 題意の級数を T とすると，T において，分母が n 桁の分数は，(1) より，

$$8\cdot 9^{n-1} \text{ 個}$$

ある．

この $8\cdot 9^{n-1}$ 個の分数の和を S_n とすると，

$$T=\sum_{n=1}^{\infty} S_n \qquad \cdots ①$$

であり，

$$S_n=\frac{1}{2\cdot 10^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{10^n-1}. \qquad \cdots ②$$

②より，

$$\begin{aligned} S_n &< \frac{1}{2\cdot 10^{n-1}}\cdot 8\cdot 9^{n-1} \\ &= 4\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}. \end{aligned} \qquad \cdots ③$$

さらに，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} &= \frac{4}{1-\frac{9}{10}} \\ &= 40 \end{aligned}$$

であるから，③より，

$$T \leqq 40$$

が成り立つ．

演習問題

25-E-1

数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n = -6$ を満たすとする．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

(1)
$$a_n = \frac{(3n-1)a_n}{3n-1}$$
であり，
$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n = -6, \\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n-1} = 0 \end{cases}$$
であるから，
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(2) -2

25-E-2

数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定められるとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

$I_n = \left|\dfrac{a_{n+1}-2}{a_n-2}\right|$ とすると,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

より,

$$\begin{aligned} I_n &= \left|\frac{\sqrt{a_n+2}-2}{a_n-2}\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}\right| \leqq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから,

$$0 \leqq |a_{n+1}-2| \leqq \frac{1}{2}|a_n-2|.$$

これより,

$$0 \leqq |a_n - 2| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2|$$

であり,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2| = 0$$

であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-2| = 0.$$

したがって,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

25-E-3

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとする．

(1) すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \sqrt{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，$a_{n+1}-\sqrt{2} \leqq \dfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(1) すべての自然数 n に対して，

$$a \geqq \sqrt{2} \qquad \cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す．

(I) $n=1$ のとき，

$$a_1=2$$

であるから，$(*)$ は成り立つ．

(II) $n=k$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する，すなわち，

$$a_k \geqq \sqrt{2}$$

であるとする．

このとき，数列 $\{a_n\}$ の定め方より，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{a_k}. \qquad \cdots ①$$

相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{a_k} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{2}a_k\cdot\frac{1}{a_k}}$$

であるから，

$$\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{a_k} \geqq \sqrt{2}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$a_{k+1} \geqq \sqrt{2}$$

であるから，$(*)$ は $n=k+1$ のときも成り立つ．

(I)，(II) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成り立つ．

(2) $I_n=\dfrac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}}$ に，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}$$

を代入すると，

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{a_n}-\sqrt{2}}{a_n-\sqrt{2}} \\ &= \frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n(a_n-\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{a_n}\right). \end{aligned} \qquad \cdots ③$$

さらに，$a_n \geqq \sqrt{2}$ より，

$$0 \leqq 1-\frac{\sqrt{2}}{a_n} \leqq 1. \qquad \cdots ④$$

③，④より，

$$I_n \leqq \frac{1}{2}$$

であるから，

$$a_{n+1}-\sqrt{2} \leqq \frac{1}{2}(a_n-\sqrt{2}).$$

(3) (1)，(2) より，

$$0 \leqq a_{n+1}-\sqrt{2} \leqq \frac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})$$

であるから，

$$0 \leqq a_n-\sqrt{2} \leqq (a_1-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad \cdots ⑤$$

また，

$$\lim_{n\to\infty}(a_1-\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$$

であるから，⑤と，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2})=0.$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}.$$

25-E-4

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=\dfrac{n+2}{n(n+1)\cdot 2^n}$ とする．

(1)　$2^n a_n=\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n+1}$ を満たす定数 b，c の値を求めよ．

(2)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(1)　$b=2,\qquad c=-1$

(2)　1

25-E-5

三角形 ABC において，$AB=3$，$BC=4$，$CA=3$ であり，円 O_1 は 3 辺に接する円，円 O_2 は辺 AB，AC に接し，かつ円 O_1 に外接する円で，以下同様にして，円 O_3，O_4，$\cdots$，O_n を作る．ただし，(O_{n+1} の半径) < (O_n の半径) とする．

$n\to\infty$ のとき，円 O_1，O_2，O_3，$\cdots$，O_n の面積の総和を求めよ．

円 O_n の半径を r_n，面積を S_n とすると，

$$\frac{1}{2}(3+4+3)r_1=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{5}$$

であるから，

$$r_1=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

よって，

$$S_1=\frac{4}{5}\pi.$$

また，

$$(r_n+r_{n+1}) : (r_n-r_{n+1})=3 : 2$$

であるから，

$$r_{n+1}=\frac{1}{5}r_n.$$

これより，

$$S_{n+1}=\frac{1}{25}S_n.$$

したがって，$n\to\infty$ のときの円 O_1，O_2，O_3，$\cdots$，O_n の面積の総和を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\frac{\frac{4}{5}\pi}{1-\frac{1}{25}}\\&=\frac{5}{6}\pi.\end{aligned}$$

25-E-6

2 つの数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ はともに正の無限大に発散し，どの項も 0 でないとする．

数列 $\{a_n - b_n\}$ が α に収束するとき，2 つの数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ および $\left\{\dfrac{{a_n}^2}{b_n} - \dfrac{{b_n}^2}{a_n}\right\}$ の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{a_n - b_n}{a_n} + 1\right)$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1.$$

同様にすると，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{{a_n}^2}{b_n} - \frac{{b_n}^2}{a_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^3 - {b_n}^3}{a_n b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)\left(\frac{a_n}{b_n} + 1 + \frac{b_n}{a_n}\right) \\
&= 3\alpha.
\end{aligned}$$

25-E-7

2 つの無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ がいずれも収束し，その和はそれぞれ A, B であるとする．また，$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$ とする．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(a_n - a_{n+1})$ が収束することを示し，その和を A, B, a_1 を用いて示せ．

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2(a_k - a_{k+1})$ とすると，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} S_n &= 4(a_1 - a_2) + 9(a_2 - a_3) + 16(a_3 - a_4) + \cdots + (n+1)^2(a_n - a_{n+1}) \\ &= 4a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \cdots + (2n+1)a_n - (n+1)^2 a_{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k - (n+1)^2 a_{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_k + 2\sum_{k=1}^{n} ka_k - (n+1)^2 a_{n+1}. \end{aligned}$$

ここで，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} na_n = B$$

であり，

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$$

より，

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^2 a_{n+1} = 0$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2(a_n - a_{n+1}) = a_1 + A + 2B.$$