# 第２５章　数列の極限（数３，４講分）

## A問題

**25-A-1**　F441A

一般項 $a_n$ が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の極限を調べよ.

(1) $a_n = 3n^2 - 2n^3$

(2) $a_n = \dfrac{3n^2+5n+2}{n^2+3n+2}$

(3) $a_n = \dfrac{3n-4}{n^2+1}$

**25-A-2**　F442A

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+7}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{9n^2+4n}-3n)$

**25-A-3**　F443A

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n\theta$

**25-A-4**　F449A

次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+2\cdot 5^n}{5^n+2^{n+1}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \{(-2)^n-3^n\}$

**25-A-5**　F450A

数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとき，一般項 $a_n$ を求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

**25-A-6**　F451A

数列 $\left\{\left(\dfrac{x^2-2x-7}{x^2-x+2}\right)^n\right\}$ が収束するような実数 $x$ の値の範囲を求めよ.

**25-A-7** F457A

次の無限級数の和を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

**25-A-8** F458A

次の問に答えよ．

(1) 正の実数 $x$ に対して，不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ が発散することを示せ．

**25-A-9** F459A

次の無限級数の収束・発散を調べ，収束するものはその和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$

**25-A-10** F465A

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{5^n}$

**25-A-11** F466A

(1) 循環小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$ は，

$$0.\dot{1}2\dot{3}=0.123+0.123\times\frac{1}{10^3}+0.123\times\frac{1}{10^6}+\cdots$$

と表すことができる．このことを用いて，循環小数 $0.\dot{1}2\dot{3}$ を既約分数の形で表せ．

(2) 循環小数 $1.2\dot{3}\dot{4}$ を既約分数の形で表せ．

**25-A-12** F467A

無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x(2-x)^{n-1}$ が収束するような実数 $x$ の値の範囲を求めよ．また，そのときの和を求めよ．

# B問題

**25-B-1** F444B

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(3n)^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-\left[\frac{n}{2}\right]}-n\right)$ ただし，$[x]$ は実数 $x$ を越えない最大の整数を表すものとする．

**25-B-2** F445B

$n$ は自然数とする．不等式 $|x|+|y|\leqq n$ で表される領域に含まれ，$x$ 座標，$y$ 座標がともに整数である点の個数を $a_n$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ を求めよ．

**25-B-3** F446B

一般項 $a_n$ が $a_n=\sqrt{(n-1)(4n-1)}+cn$ と表される数列 $\{a_n\}$ が収束するような定数 $c$ の値を求めよ．また，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

**25-B-4** F452B

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=8$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+4}{a_n+3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，$b_{n+1}$ を $b_n$ を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

**25-B-5** F453B

関数 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^2+x}{x^{2n}+1}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

**25-B-6** F454B

数列 $\{a_n\}$ が $0<a_1<3$，$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．

(1) すべての自然数 $n$ に対して，$0<a_n<3$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 $n$ に対して，$3-a_{n+1}<\dfrac{1}{3}(3-a_n)$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

**25-B-7** F460B

(1) 等式

$$\frac{1}{n(n+1)(n+3)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+3}$$

が $n$ についての恒等式となるような定数 $a$，$b$，$c$ の値を求めよ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+3)}$ の収束・発散を調べ，収束すればその和を求めよ．

**25-B-8** F461B

$k$，$n$ は自然数とする．

(1) 不等式 $\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ を用いて，不等式

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\displaystyle\sqrt{n+1}-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{n}$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}$ を求めよ．

**25-B-9** F462B

$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ が成り立つ．このことを利用して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ の和を求めよ．

**25-B-10** F468B

第 2 項が 3 である無限等比級数が収束し，その和が $-4$ であるとき，初項と公比を求めよ．

**25-B-11** F469B

無限に続く正方形の列 $T_1$，$T_2$，$T_3$，$\cdots$，$T_n$，$\cdots$ があり，$T_{n+1}$ は $T_n$ に内接し，$T_{n+1}$ の各頂点は $T_n$ の各辺を 1 : 2 に内分している．

$T_1$ の一辺の長さが 1 のとき，すべての正方形の面積の和を求めよ．

**25-B-12** F470B

$n$ は自然数とする．

(1) 不等式 $n!\geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\displaystyle 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<3$ が成り立つことを示せ．

# C問題

**25-C-1** F447C

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ について，次の事柄は正しいか．正しくないものは，その反例をあげよ．ただし，$\alpha$，$\beta$ は定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ である．

(3) $b_n < a_n < c_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = 0$ ならば，数列 $\{a_n\}$ は収束する．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である．

**25-C-2** F448C

$n$ を正の整数とし，放物線 $y = n - x^2$ と $x$ 軸で囲まれる領域 $D$ を考える．$D$ に含まれ，$x$，$y$ の値がともに整数である点の個数を $a(n)$ とする．

(1) $\sqrt{n}$ を越えない最大の整数を $k$ とする．$a(n)$ を $k$ と $n$ の多項式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n^3}}$ を求めよ．

**25-C-3** F455C

(1) $h > 0$ のとき，すべての自然数 $n$ に対して，$(1+h)^n \geqq 1 + nh + \dfrac{1}{2}n(n-1)h^2$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}$ を求めよ．

**25-C-4**　F456C

放物線 $y=x^2-2$ 上の点 $(x_n,\ {x_n}^2-2)$ における接線と $x$ 軸との交点の $x$ 座標を $x_{n+1}$ とする．このようにして，$x_1$ から順に $x_2$，$x_3$，$x_4$，$\cdots$ を作る．ただし，$x_1>\sqrt{2}$ とする．

(1) すべての自然数 $n$ に対して，$\sqrt{2}<x_{n+1}<x_n$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

**25-C-5**　F ﾁｬﾚ 57　2003 大阪市立大学

$p$，$q$ は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする．自然数 $n$ に対して，有理数 $a_n$，$b_n$ を $(p+\sqrt{q})^n=a_n+b_n\sqrt{q}$ によって定める．

(1) $(p-\sqrt{q})^n=a_n-b_n\sqrt{q}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}$ を示せ．

**25-C-6**　F463C

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=0$ ならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=1$ であることを証明せよ．

**25-C-7**　F464C

$n$ を 2 以上の整数とし，周囲の長さが 2 の正 $2n$ 角形 $K$ と，$K$ の 1 つの頂点 P を考える．

(1) $K$ と同じ平面上で，P を一端とする長さ 1 の棒を $K$ の内部を通らないようにして動かす．棒が通ることができる点全体からなる図形の面積を求めよ．

(2) $K$ と同じ平面上で，P を一端とする長さ 1 のひもを $K$ の内部を通らないようにして動かす．ひもが通過し得る領域の面積を $S_n$ として，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{25-C-8}}$ F471C

極限値 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \cos \frac{2}{3} n\pi$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{25-C-9}}$ F472C

(1) $n$ 桁の自然数のうち，各位の数字がすべて 1 と異なるものの個数を求めよ.

(2) 自然数の逆数からなる級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \cdots$$

から，分母に数字 1 が現れる項をすべて除いて得られる級数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{20} + \frac{1}{22} + \frac{1}{23} + \cdots$$

の和は 40 を越えないことを示せ.

## 演習問題

**25-E-1**

数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}(3n-1)a_n=-6$ を満たすとする．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ であることを示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

**25-E-2**

数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定められるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

**25-E-3**

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする．

(1) すべての自然数 $n$ に対して，$a_n \geqq \sqrt{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) すべての自然数 $n$ に対して，$a_{n+1}-\sqrt{2} \leqq \dfrac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})$ が成り立つことを示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

**25-E-4**

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=\dfrac{n+2}{n(n+1)\cdot 2^n}$ とする．

(1) $2^n a_n=\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{n+1}$ を満たす定数 $b$，$c$ の値を求めよ．

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

**25-E-5**

三角形 ABC において，AB $=3$，BC $=4$，CA $=3$ であり，円 $O_1$ は 3 辺に接する円，円 $O_2$ は辺 AB，AC に接し，かつ円 $O_1$ に外接する円で，以下同様にして，円 $O_3$，$O_4$，$\cdots$，$O_n$ を作る．ただし，($O_{n+1}$ の半径) $<$ ($O_n$ の半径) とする．

$n \to \infty$ のとき，円 $O_1$，$O_2$，$O_3$，$\cdots$，$O_n$ の面積の総和を求めよ．

**25-E-6**

2 つの数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ はともに正の無限大に発散し，どの項も 0 でないとする．

数列 $\{a_n - b_n\}$ が $\alpha$ に収束するとき，2 つの数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ および $\left\{\dfrac{{a_n}^2}{b_n} - \dfrac{{b_n}^2}{a_n}\right\}$ の極限を求めよ．

**25-E-7**

2 つの無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n$ がいずれも収束し，その和はそれぞれ $A$，$B$ であるとする．また，$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$ とする．このとき，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)^2(a_n - a_{n+1})$ が収束することを示し，その和を $A$，$B$，$a_1$ を用いて示せ．