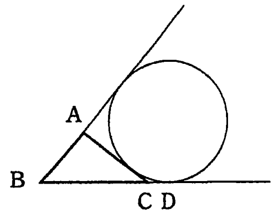
過去問めぐり・東邦大学

【１】2016 東邦大学

〔4〕　△ABCにおいて，辺ACに接する傍接円と直線BCとの接点をDとする。AB＝19，BC＝27，CA＝24のとき，BD＝ $\boxed{\text{セソ}}$ である。



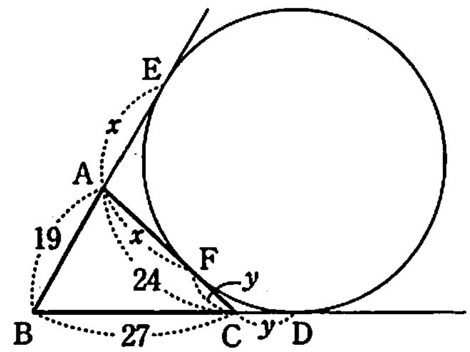
直線AB，直線CAと傍接円の接点をそれぞれE，Fとし，AE＝AF＝x，CD＝CF＝yとおくと，BE＝BDより

$$\begin{cases} x+y=24 \\ x+19=y+27 \end{cases}$$

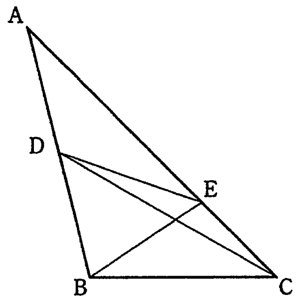
$\therefore\ x=16,\ y=8$

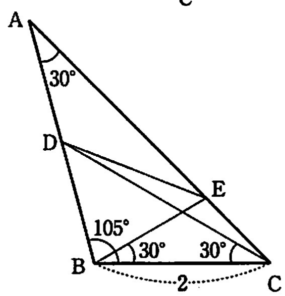
したがって，求めるBDの長さは

$$BD=BC+CD=27+8=35$$



〔9〕　$BC=2$，$\angle A=30°$，$\angle B=105°$である$\triangle ABC$において，辺AB上に点Dがあり$\angle BCD=30°$である。このとき，$CD=\sqrt{\boxed{\text{サ}}}+\boxed{\text{シ}}$である。また，辺CA上に点Eを$\angle CBE=30°$となるようにとるとき，$DE^2=\boxed{\text{スセ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}+\boxed{\text{タチ}}$である。





$\triangle BCD$において

$$\angle BDC=180°-(\angle CBD+\angle BCD)$$
$$=180°-(105°+30°)=45°$$

正弦定理より

$$\frac{CD}{\sin 105°}=\frac{2}{\sin 45°}=2\sqrt{2}$$

ゆえに，加法定理より

$$CD=2\sqrt{2}\sin 105°=2\sqrt{2}\sin(60°+45°)$$
$$=2\sqrt{2}(\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°)$$
$$=2\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=\sqrt{3}+1$$

$\angle ACB=180°-(\angle BAC+\angle ABC)=180°-(30°+105°)=45°$ より

$$\angle DCE=45°-30°=15°$$
$$\angle BEC=180°-(30°+45°)=105°$$

$\triangle BCE$において，正弦定理より

$$\frac{CE}{\sin 30°}=\frac{2}{\sin 105°}$$

ゆえに

$$CE=\frac{2\sin 30°}{\sin 105°}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

次に，$\triangle CDE$において，余弦定理より

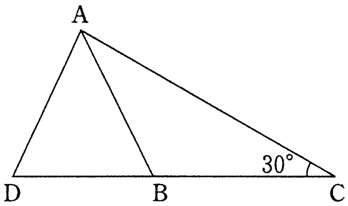
$$DE^2=CD^2+CE^2-2\times CD\times CE\times\cos 15°$$

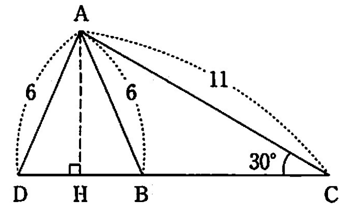
$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ より

$$DE^2=(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-2\times(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$=-4\sqrt{3}+10$$

【２】2014 東邦大学

$\boxed{\ 4\ }$　次図のように，$\angle$ABC が鈍角である$\triangle$ABC があり，AB$=6$，CA$=11$，$\angle$ACB$=30°$である。辺 CB の B を越える延長上に AD$=$AB であるような点 D をとるとき，BD$=\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}$ が成り立つ。





$\triangle$ACD において，正弦定理より

$$\frac{11}{\sin\angle \mathrm{ADC}}=\frac{6}{\sin 30°}$$

$$\therefore\quad \sin\angle \mathrm{ADC}=\frac{11}{12}$$

$0°<\angle$ADC$<90°$より，$\cos\angle$ADC>0 であるから

$$\cos\angle \mathrm{ADC}=\sqrt{1-\sin^2\angle \mathrm{ADC}}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{12}\right)^2}=\frac{\sqrt{23}}{12}$$

$\triangle$ABD において

$$\mathrm{BD}=2\times 6\cos\angle \mathrm{ADC}=\sqrt{23}$$

別解　＜その１＞　頂点 A から辺 CD に垂線 AH を下ろすと

$$\mathrm{AH}=11\sin 30°=\frac{11}{2}$$

$\triangle$ADH において，三平方の定理より

$$\mathrm{DH}=\sqrt{6^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{23}}{2}$$

よって　　$\mathrm{BD}=2\mathrm{DH}=\sqrt{23}$

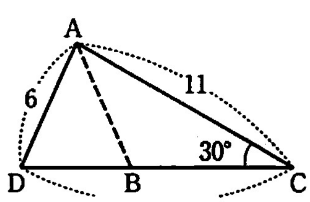
＜その２＞　$\triangle$ABC，$\triangle$ADC において，余弦定理より，BC または DC の長さを x とおくと，どちらも方程式 $6^2=x^2+11^2-2\times 11\times x\times\cos 30°$ を満たす。

これを解くと

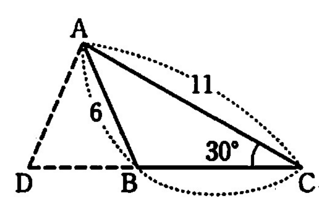
$$x^2-11\sqrt{3}x+85=0\qquad\therefore\quad x=\frac{11\sqrt{3}\pm\sqrt{23}}{2}$$

DC$>$BC より

$$\mathrm{DC}=\frac{11\sqrt{3}+\sqrt{23}}{2},\quad \mathrm{BC}=\frac{11\sqrt{3}-\sqrt{23}}{2}$$



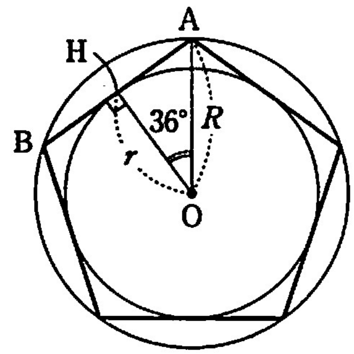
$x=\dfrac{11\sqrt{3}+\sqrt{23}}{2}$



$x=\dfrac{11\sqrt{3}-\sqrt{23}}{2}$

よって　　$\mathrm{BD}=\mathrm{DC}-\mathrm{BC}=\sqrt{23}$

12　正五角形の外接円および内接円の半径をそれぞれ R, r とするとき，$\dfrac{r}{R}=\dfrac{\boxed{ミ}+\sqrt{\boxed{ム}}}{\boxed{メ}}$ が成り立つ。



正五角形の内接円および外接円の中心をO，正五角形の1辺ABと内接円の接点をHとする。

$\angle AOB=360°\div 5=72°$　　∴　$\angle AOH=36°$

△AOHにおいて

$$\frac{r}{R}=\cos 36°$$

$\theta=36°$ とおくと，$5\theta=180° \iff 3\theta=180°-2\theta$ より

$$\cos 3\theta=\cos(180°-2\theta)=-\cos 2\theta$$

2倍角，3倍角の公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ より

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=-(2\cos^2\theta-1)$$

整理すると

$$4\cos^3\theta+2\cos^2\theta-3\cos\theta-1=0$$

$$(\cos\theta+1)(4\cos^2\theta-2\cos\theta-1)=0$$

$$\therefore\quad \cos\theta=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$$

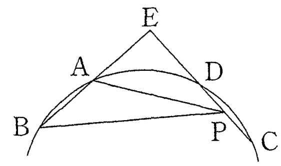
$0<\cos\theta<1$ より

$$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

したがって　$\dfrac{r}{R}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

【３】2013 東邦大学

$\boxed{4}$ 次図のように，円周上の４点 A，B，C，D に対して，直線 AB と直線 CD の交点を E とし，AB＝4，AE＝5，∠AED＝90° とする。線分 CD 上を動く点 P が ∠APB を最大にするとき，EP＝$\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}$ である。



EP＝x とし，∠APE＝α，∠BPE＝β とおく。△APE，△BPE はともに∠AED＝90° の直角三角形であるから，与えられた図より

$$\tan\alpha=\frac{5}{x},\quad \tan\beta=\frac{9}{x}\quad (0^\circ<\alpha<\beta<90^\circ)$$

このとき

$$\tan\angle APB=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{45}{x^2}}=\frac{4}{x+\frac{45}{x}}$$

EP＝$x>0$ であるから，相加・相乗平均より

$$x+\frac{45}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{45}{x}}=6\sqrt{5}$$

等号成立は，$x=\frac{45}{x}$ $(x>0)$ より，$x=3\sqrt{5}$ のとき。

$0^\circ<\angle APB<90^\circ$ であるから，$x+\frac{45}{x}$ が最小となるとき，$\tan\angle APB$ すなわち∠APB は最大となる。よって，求める EP の値は，$x+\frac{45}{x}$ が最小となるときの x の値に等しいので

$$EP=3\sqrt{5}$$