第１３章　三角関数（数Ⅱ，２講分）

A問題

13-A-1　F217A

$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，次の方程式，不等式を解け．

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

(2) $\cos\theta < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

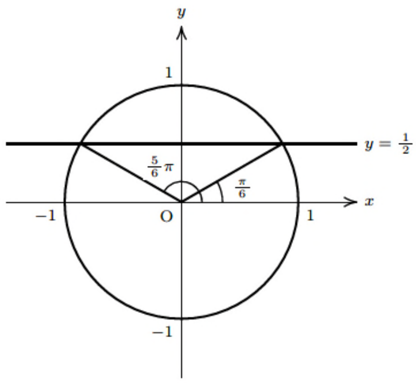
(3) $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

を解くと，

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi.$$

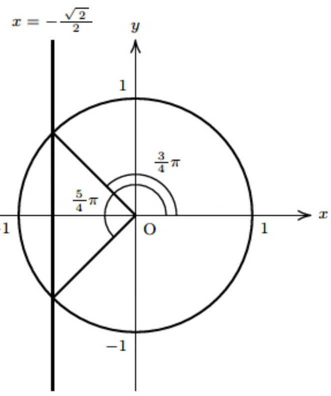


(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，

$$\cos\theta < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を解くと，

$$\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi.$$

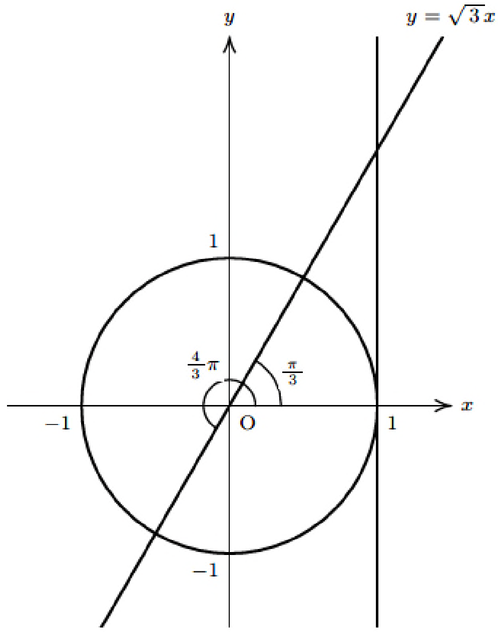


(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，

$$\tan\theta \geqq \sqrt{3}$$

を解くと，

$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta < \frac{\pi}{2},\quad \frac{4}{3}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi.$$



$\boxed{\textbf{13-A-2}}$ F218A

$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，次の方程式，不等式を解け．

(1) $2\cos^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

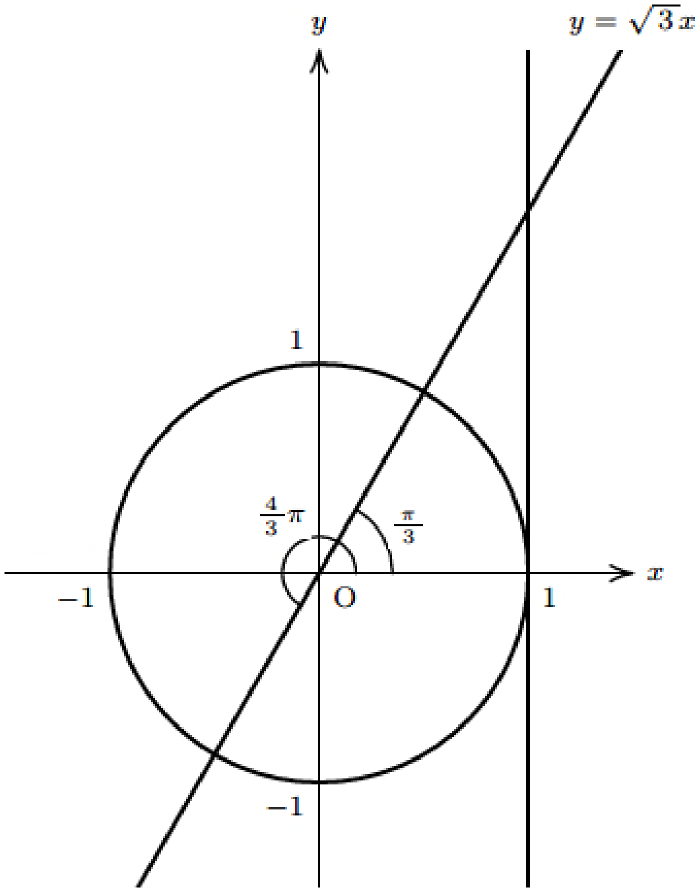
(2) $4\cos^2\theta \leqq 3$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ において，

$$\tan\theta \geqq \sqrt{3}$$

を解くと，

$$\frac{\pi}{3} \leqq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{4}{3}\pi \leqq \theta < \frac{3}{2}\pi.$$



13-A-3　F219A

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$\dfrac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$，$\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$，$\cos\beta = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ の値をそれぞれ求めよ．

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ のとき，

$$\cos\alpha < 0$$

であるから，

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= -\sqrt{1-\sin^2\alpha}\\ &= -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

また，$\dfrac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ のとき，

$$\sin\beta < 0$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sin\beta &= -\sqrt{1-\cos^2\beta}\\ &= -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\\ &= -\frac{4}{5}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\\ &= \frac{3+8\sqrt{2}}{15},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{5}\right)\\ &= \frac{-6\sqrt{2}-4}{15}.\end{aligned}$$

13-A-4 F225A

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における関数 $y = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right)$ の最大値，最小値を求めよ．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，

$$-\frac{\pi}{12} \leqq \theta - \frac{\pi}{12} \leqq \frac{11}{12}\pi$$

であるから，

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \leqq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) \leqq 1.$$

これより，

$$-2\sin\frac{\pi}{12} \leqq 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{12}\right) \leqq 2$$

が成り立つから，y は，

$\theta = \frac{7}{12}\pi$ のとき，　最大値 2，

$\theta = 0$ のとき，　最小値 $-2 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

をとる．

13-A-5 F226A

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ．ただし，$r>0$，$-\pi<\theta<\pi$ とする．

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

(2) $\sin\theta-\cos\theta$

(3) $\sqrt{6}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta$

(1) 点 A の座標を $(1,\ \sqrt{3})$ と定めると，$\mathrm{OA}=2$ であり，動径 OA と x 軸の正の方向とのなす角のうち，最小の正の角は，

$$\frac{\pi}{3}$$

であるから，

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right).$$

(2) 点 B の座標を $(1,\ -1)$ と定めると，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$ であり，動径 OB と x 軸の正の方向とのなす角のうち，絶対値が最小の角は，

$$-\frac{\pi}{4}$$

であるから，

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right).$$

(3) 点 C の座標を $(\sqrt{6},\ -\sqrt{2})$ と定めると，$\mathrm{OC}=2\sqrt{2}$ であり，動径 OC と x 軸の正の方向とのなす角のうち，絶対値が最小の角は，

$$-\frac{\pi}{6}$$

であるから，

$$\sqrt{6}\sin\theta-\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right).$$

$\boxed{\textbf{13-A-6}}$ F227A

2 直線 $y=2x-1$，$y=-3x$ のなす角を求めよ．

直線 $y=2x-1$ と x 軸の正の方向とのなす角を

$$\alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

とし，直線 $y=-3x$ と x 軸の正の方向とのなす角を

$$\beta \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とすると，

$$\tan\alpha=2, \quad \tan\beta=-3. \qquad \cdots ①$$

また，2 直線のなす角を θ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

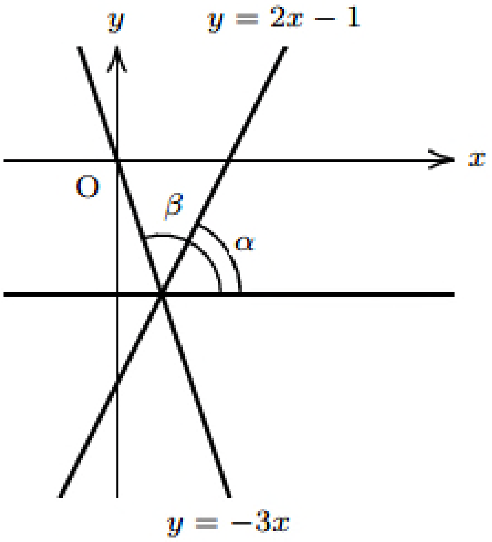
$$\begin{aligned}\tan\theta &= |\tan(\alpha-\beta)| \\ &= \left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|. \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

①，②より，

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right| \\ &= 1\end{aligned}$$

であるから，2 直線のなす角 θ は，

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$



B問題

13-B-1　F220B

次の方程式，不等式を解け．

(1) $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 2\theta+\cos\theta \leqq 0 \quad (0\leqq\theta<2\pi)$

(3) $2\sin 2\theta-2\sin\theta+2\cos\theta>1 \quad (0\leqq\theta<2\pi)$

(1) $\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の解は，整数 n を用いて，

$$2\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\quad \frac{2}{3}\pi+2n\pi$$

と表すことができるから，

$$\theta=n\pi,\quad \frac{\pi}{6}+n\pi.$$

(2)

$$\cos 2\theta+\cos\theta\leqq 0 \quad \cdots ①$$

より，

$$2\cos^2\theta-1+\cos\theta\leqq 0$$

であるから，

$$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\leqq 0.$$

これより，

$$-1\leqq\cos\theta\leqq\frac{1}{2}.$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，①の解は，

$$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi.$$

(3)

$$2\sin 2\theta-2\sin\theta+2\cos\theta>1 \quad \cdots ②$$

より，

$$4\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta+2\cos\theta-1>0$$

$$(2\sin\theta+1)(2\cos\theta-1)>0.$$

これより，

$$\begin{cases}2\sin\theta+1>0,\\ 2\cos\theta-1>0\end{cases}$$

または，

$$\begin{cases}2\sin\theta+1<0,\\ 2\cos\theta-1<0\end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases}\sin\theta>-\dfrac{1}{2},\\ \cos\theta>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

または

$$\begin{cases}\sin\theta<-\dfrac{1}{2},\\ \cos\theta<\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，それぞれを解くと，②の解は，

$$0\leqq\theta<\frac{\pi}{3},\quad \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi,\quad \frac{11}{6}\pi<\theta<2\pi.$$

13-B-2 F221B

次の式の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{\pi}{12}$

(2) $\cos\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{7}{12}\pi$

(3) $\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2}{9}\pi\sin\dfrac{4}{9}\pi$

(1) $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ なので，加法定理より，

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{12}&=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

(2) 和を積に直す公式を用いると，

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{7}{12}\pi&=2\cos\frac{\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{12}}{2}\\&=2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(3) $\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2}{9}\pi$ に対して，積を和に直す公式を用いると，

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2}{9}\pi&=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{2}{9}\pi-\frac{\pi}{9}\right)-\cos\left(\frac{2}{9}\pi+\frac{\pi}{9}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2}{9}\pi\sin\frac{4}{9}\pi&=\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{4}\right)\sin\frac{4}{9}\pi\\&=\frac{1}{2}\sin\frac{4}{9}\pi\cos\frac{\pi}{9}-\frac{1}{4}\sin\frac{4}{9}\pi.\qquad\cdots①\end{aligned}$$

さらに，$\sin\dfrac{4}{9}\pi\cos\dfrac{\pi}{9}$ に対して，積を和に直す公式を用いると，

$$\begin{aligned}\sin\frac{4}{9}\pi\cos\frac{\pi}{9}&=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{4}{9}\pi+\frac{\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{4}{9}\pi-\frac{\pi}{9}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5}{9}\pi+\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\sin\frac{5}{9}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}.\qquad\cdots②\end{aligned}$$

①，②と，$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ より，

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2}{9}\pi\sin\frac{4}{9}\pi&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{5}{9}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{1}{4}\sin\frac{4}{9}\pi\\&=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{5}{9}\pi-\sin\frac{4}{9}\pi\right)+\frac{\sqrt{3}}{8}\\&=\frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

13-B-3 F222B

$\theta = \dfrac{\pi}{5}$ のとき，$3\theta = \pi - 2\theta$ が成り立つ．これを用いて，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を求めよ．

$3\theta = \pi - 2\theta$ のとき，

$$\cos 3\theta = \cos(\pi - 2\theta)$$

が成り立つから，

$$\cos 3\theta = -\cos 2\theta.$$

倍角の公式，3 倍角の公式を用いると，

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -(2\cos^2\theta - 1)$$

であるから，

$$4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$$

$$(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0.$$

これと，$\cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{5} > 0$ であることから，

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

13-B-4 F228B

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta + \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ の最大値，最小値を求めよ．

(1) $I = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ とし，三角関数の合成を用いると，

$$I = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，

$$\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

であるから，

$$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq 1.$$

したがって，

$$-2 \leqq 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leqq 2$$

であるから，

$$-2 \leqq I \leqq 2.$$

以上より，I，すなわち，$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ は，

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，　最大値 2，

$\theta = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，　最小値 -2

をとる．

(2) $J = \sin\theta + \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ とし，加法定理を用いると，

$$\begin{aligned} J &= \sin\theta + \left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sqrt{3}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$-\frac{\pi}{6} \leqq \theta - \frac{\pi}{6} \leqq \frac{\pi}{3}$$

であるから，

$$-\frac{1}{2} \leqq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

したがって，

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sqrt{3}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leqq \frac{3}{2}$$

であるから，

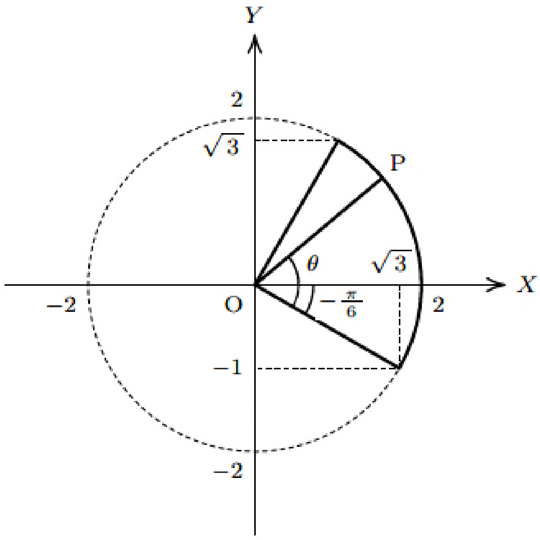
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq J \leqq \frac{3}{2}.$$

以上より，J，すなわち，$\sin\theta + \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ は，

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，　最大値 $\dfrac{3}{2}$，

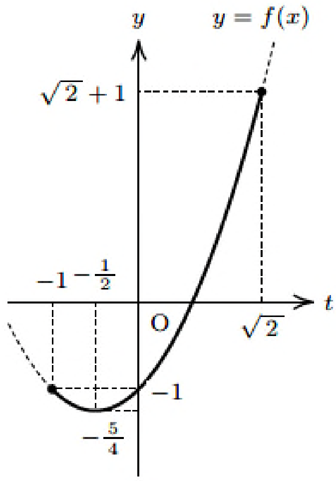
$\theta = 0$ のとき，　最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

をとる．



13-B-5　F229B

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $y = \sin 2x + \sin x + \cos x$ の最大値，最小値を求めよ．



$t = \sin x + \cos x$ とすると，

$$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

ここで，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，

$$\frac{\pi}{4} \leqq x + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$$

であるから，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1.$$

したがって，

$$-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

であるから，

$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}.$$

また，

$$t^2 = (\sin x + \cos x)^2$$

であるから，

$$t^2 = 1 + \sin 2x.$$

よって，

$$\sin 2x = t^2 - 1.$$

これより，

$$y = t^2 + t - 1.$$

ここで，$f(t) = t^2 + t - 1$ とすると，

$$f(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

であるから，$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における $y = f(t)$ のグラフは次のようになる．

したがって，y は，

$$t = \sqrt{2} \text{ のとき，}\quad \text{最大値 } \sqrt{2} + 1,$$
$$t = -\frac{1}{2} \text{ のとき，}\quad \text{最小値 } -\frac{5}{4}$$

をとる．

$\boxed{\textbf{13-B-6}}$ F231C

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，関数 $y = 5\cos^2 x + 6\sin x \cos x - 3\sin^2 x$ の最大値，最小値を求めよ．

半角公式

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$
$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

を用いると，

$$\begin{aligned} y &= 5 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x - 3 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= 3\sin 2x + 4\cos 2x + 1 \\ &= 5\sin(2x+\alpha) + 1. \end{aligned}$$

$$\left(\text{ただし，} \alpha \text{ は } \cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5} \text{ を満たす最小の角とする} \right)$$

ここで，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，

$$\alpha \leqq 2x + \alpha \leqq \pi + \alpha$$

であるから，

$$\sin(\pi+\alpha) \leqq \sin(2x+\alpha) \leqq 1$$
$$-\sin\alpha \leqq \sin(2x+\alpha) \leqq 1$$
$$-\frac{4}{5} \leqq \sin(2x+\alpha) \leqq 1$$
$$-4 \leqq 5\sin(2x+\alpha) \leqq 5$$
$$-3 \leqq 5\sin(2x+\alpha) + 1 \leqq 6.$$

したがって，y は，

最大値 6，最小値 -3

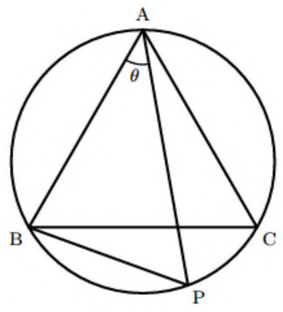
をとる．

13-B-7　F230B

一辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形 ABC がある．三角形 ABC の外接円の A を含まない方の弧 BC 上に点 P をとる．このとき，$\angle\mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$ とする．

(1) $\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$ を θ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$ のとり得る値の範囲を求めよ．



(1)　三角形 PAB に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{PAB}}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$$

であり，円周角の定理より，

$$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{3}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{PB}}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

したがって，

$$\mathrm{PB}=2\sin\theta. \qquad \cdots ①$$

また，三角形 PCA に正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\angle\mathrm{ACP}}=\frac{\mathrm{PC}}{\sin\angle\mathrm{CAP}}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{CPA}}$$

であり，円周角の定理より，

$$\begin{cases}\angle\mathrm{PCB}=\theta,\\ \angle\mathrm{CPA}=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

であるから，

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}=\frac{\mathrm{PC}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

したがって，

$$\begin{cases}\mathrm{PA}=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right),\\ \mathrm{PC}=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right).\end{cases} \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)+2\sin\theta+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right).$$

(2)　(1) の結果より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)+2\sin\theta\\&\quad+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\\&=2(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)\\&=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$\frac{\pi}{3}<\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{2}{3}\pi$$

であるから，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1.$$

したがって，$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$ のとり得る値の範囲は，

$$2\sqrt{3}<\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}\leqq 4.$$

((2) の別解)

直線 BP 上に，B に関して P と反対側に，$\mathrm{BD}=\mathrm{PC}$ を満たす点 D をとる．

このとき，三角形 ADP は正三角形であり，

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$$

は三角形 ADP の 2 辺の和．

したがって，正三角形 ADP の 1 辺の長さ l のとり得る値の範囲を調べればよい．

P が弧 BC 上を動くとき，

$$\sqrt{3}<l\leqq 2$$

が成り立つから，

$$2\sqrt{3}<\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}\leqq 4.$$

((2) の別解終り)

C 問題

13-C-1 F223C

直角三角形でない三角形 ABC において，次の等式が成り立つことを示せ．

(1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

(2) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(3) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(1) 和を積に直す公式を用いると，

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}. \qquad \cdots ①$$

また，$A+B+C=\pi$ であることから，

$$\begin{aligned}\sin C&=\sin\{\pi-(A+B)\}\\&=\sin(A+B)\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}. \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

①，②より，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)\\&=2\sin\frac{\pi-C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\\&=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\\&=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=(\text{右辺})\end{aligned}$$

であるから，示せた．

(2) 和を積に直す公式を用いると，

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}. \qquad \cdots ①$$

また，$A+B+C=\pi$ であることから，

$$\begin{aligned}\cos C&=\cos\{\pi-(A+B)\}\\&=-\cos(A+B)\\&=-\left(2\cos^2\frac{A+B}{2}-1\right)\\&=1-2\cos^2\frac{A+B}{2}. \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

①，②より，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=1-2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)\\&=1-2\cos\frac{\pi-C}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)\\&=1+4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\&=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=(\text{右辺})\end{aligned}$$

であるから，示せた．

(3) $A+B+C=\pi$ より，

$$\begin{aligned}\tan C&=\tan\{\pi-(A+B)\}\\&=-\tan(A+B)\\&=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}\end{aligned}$$

であるから，

$$\tan C=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}.$$

これより，

$$\tan C(\tan A\tan B-1)=\tan A+\tan B$$

であるから，

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

13-C-2　F224C

区間 $0 \leqq \theta < 2\pi$ における方程式 $\cos 2\theta + 2\cos\theta = 2a+1$ の解の個数を a の値で分類せよ．

$$\cos 2\theta + 2\cos\theta = 2a+1 \qquad \cdots ①$$

より，

$$2\cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta = 2a+1$$

であるから，

$$\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = a. \qquad \cdots ②$$

ここで，

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

とすると，

$$f(\cos\theta) = (②\text{の左辺})$$

であり，$x = \cos\theta$ のとき，$0 \leqq \theta < 2\pi$ なので，

$$-1 \leqq x \leqq 1.$$

したがって，区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における方程式 $f(x) = a$ の解について考えればよい．

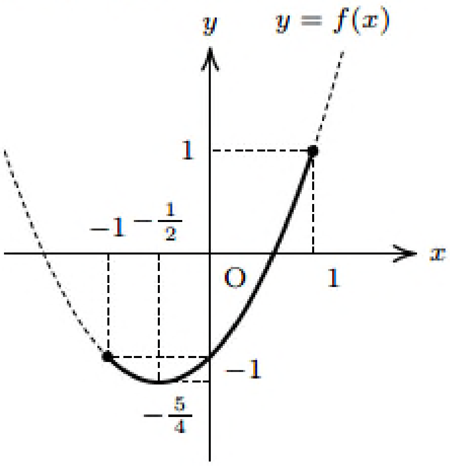
方程式 $f(x) = a$ が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で解をもつとき，その 1 つを α とすれば，次のようになる．

$$\begin{cases} -1 < \alpha < 1 \text{のとき，} & \cos\theta = \alpha \text{を満たす} \theta \text{は 2 つ存在する．} \\ \alpha = 1 \text{のとき，} & \cos\theta = \alpha \text{を満たす} \theta \text{はただ 1 つ．} \\ \alpha = -1 \text{のとき，} & \cos\theta = \alpha \text{を満たす} \theta \text{はただ 1 つ．} \end{cases}$$

さらに，方程式 $f(x) = a$ の実数解は，放物線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の x 座標と一致するから，放物線 $y = f(x)$ を描いて，直線 $y = a$ との関係を調べる．

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

であるから，放物線 $y = f(x)$ は次のようになる．

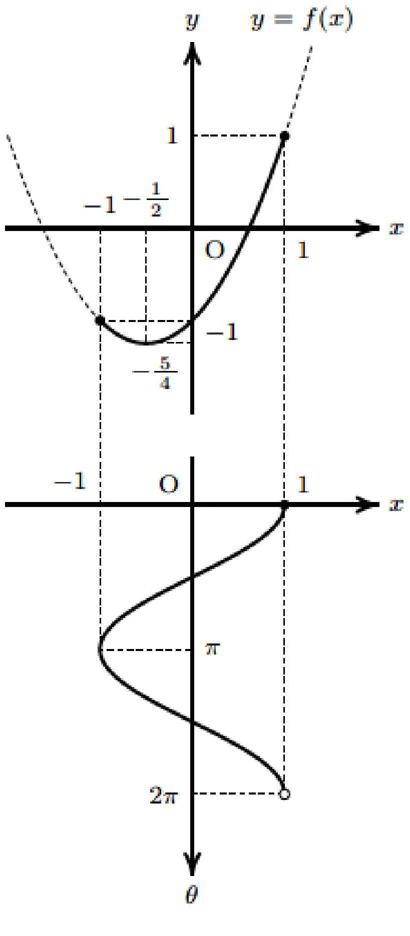


$-1 \leqq x \leqq 1$ であることに注意すると，方程式 $f(x) = a$ の解を a の値で分類すると，次のようになる．

$$\begin{cases} a > 1 \text{ のとき}, & 0 \text{ 個}, \\ -1 < a \leqq 1 \text{ のとき}, & 1 \text{ 個}, \\ -\frac{5}{4} < a \leqq -1 \text{ のとき}, & 2 \text{ 個}, \\ a = -\frac{5}{4} \text{ のとき}, & 1 \text{ 個}, \\ a < -\frac{5}{4} \text{ のとき}, & 0 \text{ 個}. \end{cases}$$

以上より，①の解の個数を a の値で分類すると，次のようになる．

$$\begin{cases} a > 1 \text{ のとき}, & 0 \text{ 個}, \\ a = 1 \text{ のとき}, & 1 \text{ 個}, \\ -1 < a < 1 \text{ のとき}, & 2 \text{ 個}, \\ a = -1 \text{ のとき}, & 3 \text{ 個}, \\ -\frac{5}{4} < a < -1 \text{ のとき}, & 4 \text{ 個}, \\ a = -\frac{5}{4} \text{ のとき}, & 2 \text{ 個}, \\ a < -\frac{5}{4} \text{ のとき}, & 0 \text{ 個}. \end{cases}$$

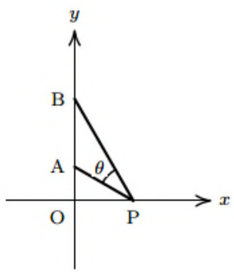


13-C-3　F232C

y 軸上に，2 点 A(0, 1)，B(0, 3) と，x 軸の正の部分に動点 P(t, 0) ($t>0$) がある．このとき，$\angle \mathrm{APB}=\theta$ とする．

(1) $\tan\theta$ を t を用いて表せ．

(2) θ の最大値を求めよ．



(1) $\angle \mathrm{OPA}=\alpha$，$\angle \mathrm{OPB}=\beta$ とすると，

$$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$$

であり，

$$\tan\alpha=\frac{1}{t},\quad \tan\beta=\frac{3}{t}.$$

また，

$$\theta=\beta-\alpha$$

であるから，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{\frac{3}{t}-\frac{1}{t}}{1+\frac{3}{t^2}}\\&=\frac{2t}{t^2+3}.\end{aligned}$$

(2) (1) の結果より，

$$\tan\theta=\frac{2}{t+\frac{3}{t}}. \qquad \cdots ①$$

ここで，$t>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$t+\frac{3}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}},$$

すなわち，

$$t+\frac{3}{t}\geqq 2\sqrt{3}. \qquad \cdots ②$$

（等号が成り立つのは $t=\frac{3}{t}$ かつ $t>0$，すなわち，$t=\sqrt{3}$ のとき）

②より，

$$\frac{1}{t+\frac{3}{t}}\leqq\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

であるから，

$$\frac{2}{t+\frac{3}{t}}\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

これと①より，

$$\tan\theta\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

さらに，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$0<\theta\leqq\frac{\pi}{6}.$$

したがって，θ の最大値は，

$$\frac{\pi}{6}.$$

(別解)

2 点 A，B を通り，x 軸と共有点をもつ円 K を考える．

K において，弧 AB に対する円周角が $\angle \mathrm{APB}$ であるから，$\angle \mathrm{APB}$ が最大となるのは，弦 AB が一定であることから，条件を満たす K が最小のとき．

それは K が x 軸と接するときであるから，方べきの定理より，

$$\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\mathrm{OP}^2$$

が成り立つ．

これより，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$$

であるから，

$$\begin{cases}\angle \mathrm{APO}=30^\circ,\\ \angle \mathrm{BPO}=60^\circ.\end{cases}$$

したがって，$\angle \mathrm{APB}$ の最大値は，

$$30^\circ.$$

(別解終り)

13-C-4 チャレ 29 （計算問題、オススメ）

$4s^2+t^2=4$ を満たす実数 s，t について，$12s^2+16st-3t^2$ の値を最小とする s，t の値を求めよ．

$4s^2+t^2=4$ において，s を $-s$，t を $-t$ にしても同じ式になる．

また，

$$f(s,\ t)=12s^2+16st-3t^2$$

とすると，

$$f(-s,\ -t)=f(s,\ t).$$

したがって，$t\geqq 0$ のときを考えればよい．

ここで，$4s^2+t^2=4$ より，

$$s^2+\frac{t^2}{4}=1$$

であるから，実数 θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を用いて，

$$\begin{cases} s=\cos\theta, \\ t=2\sin\theta \end{cases}$$

とおける．

これを $I=12s^2+16st-3t^2$ に代入すると，

$$\begin{aligned} I&=12\cos^2\theta+32\sin\theta\cos\theta-12\sin^2\theta \\ &=12\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+32\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta-12\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &=16\sin 2\theta+12\cos 2\theta \\ &=20\sin(2\theta+\alpha). \end{aligned}$$

$\left(\text{ただし，}\alpha\text{ は }\cos\alpha=\dfrac{4}{5},\quad \sin\alpha=\dfrac{3}{5}\text{ を満たす最小の角とする}\right)$

これと $0\leqq\theta\leqq\pi$ より，I が最小となるのは，

$$2\theta+\alpha=\frac{3}{2}\pi$$

のときであるから，

$$\theta=\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}.$$

このとき，

$$\begin{aligned} s&=\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right) \\ &=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right), \\ t&=2\sin\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right) \\ &=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

ここで，

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

であり，$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ であるから，

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{9}{10},\quad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{10}.$$

さらに，$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}},\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

以上より，$12s^2+16st-3t^2$ の値を最小とする s，t の値は，

$$s=\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\quad t=\mp\frac{4}{\sqrt{5}}. \qquad \text{(複号同順)}$$

13-C-5 チャレ 28

平面上の点 O を中心とし半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A，B，C がある．三角形 ABC の内接円の半径 r は $\frac{1}{2}$ 以下であることを示せ．

三角形 ABC の外接円の半径が 1 であるから，正弦定理を用いると，

$$\begin{cases} \mathrm{BC} = 2\sin A, \\ \mathrm{CA} = 2\sin B, \\ \mathrm{AB} = 2\sin C. \end{cases}$$

さらに，三角形 ABC の内接円の半径 r について，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB})r$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}\sin C = \frac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB})r$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sin A\cdot 2\sin B\cdot\sin C = \frac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB})r$$

$$r = \frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}$$

が成り立つ．

したがって，$r \leqq \frac{1}{2}$ が成り立つための条件は，

$$4\sin A\sin B\sin C \leqq \sin A+\sin B+\sin C. \quad \cdots ①$$

ここで，$A+B+C=\pi$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}(①の右辺) &= \sin A+\sin B+\sin(A+B) \\ &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \\ &= 2\sin\frac{\pi-C}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \\ &= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\end{aligned}$$

であるから，

$$(①の右辺) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \quad \cdots ②$$

また，

$$(①の左辺) = 32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \quad \cdots ③$$

②，③より，①は，

$$32\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqq 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

であるから，$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \neq 0$ より，

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}. \quad \cdots ④$$

以上より，④が成り立つことを示せばよい．

$$I = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

とし，積を和に直す公式を用いると，

$$I = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

であるから，$\sin\frac{C}{2} > 0$ より，

$$I \leqq \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}. \quad \cdots ⑤$$

さらに，

$$J = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

とすると，$A+B+C=\pi$ より，

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{2}\left\{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\right\}\sin\frac{C}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sin C-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}. \quad \cdots ⑥\end{aligned}$$

⑥より，

$$J \leqq \frac{1}{8}$$

であるから，⑤より，

$$I \leqq \frac{1}{8}.$$

演習問題

13-E-1

次の方程式，不等式を解け．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(1) $\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\cos 3\theta + \sin 2\theta + \cos\theta > 0$

(1) $\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(2) $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$

13-E-2 次の問に答えよ。

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan 2\theta$ の値を求めよ．

(2) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$，$\cos\theta = -\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}$ の値をそれぞれ求めよ．

(1) $\pm\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$

(2) $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{26}}{26}$

13-E-3

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け．

(1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

(2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x < \sqrt{2}$

(1) $x = \dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{7}{12}\pi$

(2) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{7}{12}\pi < x < 2\pi$

13-E-4

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，不等式

$$2\sin x \leqq |\sqrt{1+\cos 2x} - \sqrt{1-\cos 2x}\,|$$

を満たす x の範囲を求めよ．

$$2\sin x \leqq |\sqrt{1+\cos 2x} - \sqrt{1-\cos 2x}\,| \qquad \cdots ①$$

において，$x=0$，$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，

$$2\sin x \leqq 0$$

であるから，①は成り立つ．

$0 < x < \pi$ の範囲で考える．

この範囲において，①の両辺は 0 以上であるから，

$$4\sin^2 x \leqq (1+\cos 2x) - 2\sqrt{1-\cos^2 2x} + (1-\cos 2x).$$

整理すると，

$$4\sin^2 x \leqq 2 - 2|\sin 2x\,|$$

$$|\sin 2x\,| \leqq \cos 2x. \qquad \cdots ②$$

$0 < x < \pi$ において，②を満たす x の範囲は，

$$0 < x \leqq \frac{\pi}{8},\quad \frac{7}{8}\pi \leqq x < \pi.$$

以上より，求める x の範囲は，

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{8},\quad \frac{7}{8}\pi \leqq x \leqq 2\pi.$$

$\boxed{\textbf{13-E-5}}$

θ に関する方程式 $\sin\theta - k\cos\theta = 2(1-k)$ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$ とすると，点 $(x,\ y)$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点である．

また，

$$\sin\theta - k\cos\theta = 2(1-k)$$

は，

$$y - kx = 2(1-k)$$

$$y = k(x-2) + 2$$

であるから，点 $(x,\ y)$ は傾きが k で，点 $(2,\ 2)$ を通る直線上の点である．

k が最小となるのは，

$$(x,\ y) = (0,\ 1)$$

のときであるから，k の最小値は，

$$k = \frac{1}{2}.$$

k が最大となるのは，直線 $y = k(x-2)+2$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ と第 4 象限で接するときである．

$$\frac{|2-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$$

より，

$$k^2 + 1 = 4(1-k)^2$$

$$3k^2 - 8k + 3 = 0$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$$

であるから，k の最大値は，

$$k = \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

以上より，

$$\frac{1}{2} \leqq k \leqq \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

$\boxed{\textbf{13-E-6}}$

三角形 ABC において，$\angle A = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする.

(1) $\sin B + \sin C$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) $\sin B \sin C$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(1) 和を積に直す公式より，

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

であり，

$$B + C = \frac{2}{3}\pi$$

であるから，

$$\sin B + \sin C = \sqrt{3}\cos\frac{B-C}{2}.$$

さらに，

$$-\frac{2}{3}\pi < B - C < \frac{2}{3}\pi$$

であるから，

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin B + \sin C \leqq \sqrt{3}.$$

(2) 積を和に直す公式より，

$$\sin B \sin C = \frac{1}{2}\{\cos(B-C) - \cos(B+C)\}$$

であるから，

$$\sin B \sin C = \frac{1}{2}\left\{\cos(B-C) + \frac{1}{2}\right\}.$$

したがって，

$$0 < \sin B \sin C \leqq \frac{3}{4}.$$