第１１章　図形と式Ｉ（数Ⅱ，２講分）

A問題

11-A-1　F185A

2 点 $A(-1,\ 3)$，$B(2,\ -6)$ がある．

(1) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 C の座標を求めよ．

(3) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点 D の座標を求めよ．

(1) 2 点間の距離公式より，

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-6-3)^2}\\ &= \sqrt{90}\\ &= 3\sqrt{10}.\end{aligned}$$

(2) 内分公式より，C の座標は，

$$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2+1},\quad \frac{1\cdot 3+2\cdot(-6)}{2+1}\right)=(1,\quad -3).$$

(3) 外分公式より，D の座標は，

$$\left(\frac{-1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2-1},\quad \frac{-1\cdot 3+2\cdot(-6)}{2-1}\right)=(5,\quad -15).$$

11-A-2　F186A

直線 $3x-y+2=0$ に関して点 $A(-4,\ 0)$ と対称な点 B の座標を求めよ．

直線 l : $3x-y+2=0$ に関して，2 点 A，B が対称である条件は，l が線分 AB の垂直二等分線になることであるから，

$$\begin{cases} l \perp AB, \\ \text{線分 AB の中点が } l \text{ 上.}\end{cases}$$

ここで，l の方程式が

$$y=3x+2$$

となることに注目すると，B の座標が $(a,\ b)$ のとき，条件は，

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a-(-4)}\cdot 3=-1, \\ \dfrac{b}{2}=3\cdot\dfrac{a-4}{2}+2.\end{cases}$$

これより，

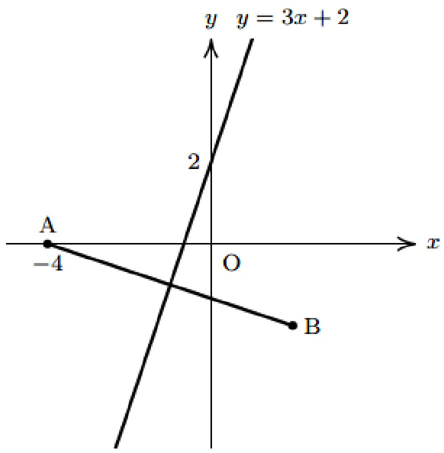
$$\begin{cases} a+3b=-4, \\ 3a-b=8\end{cases}$$

であるから，

$$a=2,\quad b=-2.$$

したがって，求める B の座標は，

$$B(2,\quad -2).$$



11-A-3 F187A

xy 平面における 2 直線 l : $(a+1)x+(a+2)y-4=0$, m : $6x+(2a-3)y-5=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値をそれぞれ求めよ．

(1) l と m は平行である．

(2) l と m が垂直である．

(1) l と m が平行である条件は，

$$(a+1)(2a-3)-6(a+2)=0$$

であるから，

$$2a^2-7a-15=0$$

$$(2a+3)(a-5)=0.$$

したがって，

$$a=-\frac{3}{2},\quad 5.$$

(2) l と m が垂直である条件は，

$$6(a+1)+(a+2)(2a-3)=0$$

であるから，

$$2a^2+7a=0$$

$$a(2a+7)=0.$$

したがって，

$$a=0,\quad -\frac{7}{2}.$$

11-A-4 F193A

次の円の方程式を求めよ．

(1) 2 点 (-1, -1), (5, 7) を直径の両端とする円．

(2) 中心の座標が (-3, -4) で，x 軸に接する円．

(3) 3 点 (-4, 6), (2, 6), (-5, -1) を通る円．

(1) 2 点 (-1, -1), (5, 7) を結ぶ線分の中点の座標は，

$$(2,\ 3)$$

であり，2 点 (2, 3), (5, 7) 間の距離は，

$$\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5$$

であるから，求める円の方程式は，

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25.$$

(2) 中心の y 座標が -4 で，円が x 軸に接するので，円の半径は，

$$|-4|=4.$$

したがって，求める円の方程式は，

$$(x+3)^2+(y+4)^2=16.$$

(3) 円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とすると，3 点 (-4, 6), (2, 6), (-5, -1) を通ることから，

$$\begin{cases} 52-4a+6b+c=0, \\ 40+2a+6b+c=0, \\ 26-5a-b+c=0. \end{cases}$$

これを解くと，

$$a=2,\quad b=-4,\quad c=-20$$

であるから，求める円の方程式は，

$$x^2+y^2+2x-4y-20=0.$$

11-A-5 F194A

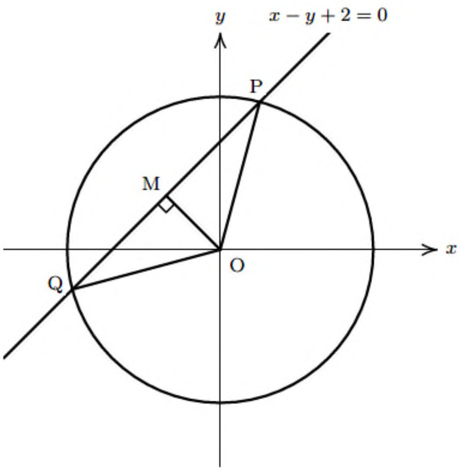
(1) 円 $x^2+y^2=8$ が直線 $x-y+2=0$ から切り取る線分の長さを求めよ.

(2) 放物線 $y=x^2$ が直線 $y=2x+1$ から切り取る線分の長さを求めよ.

(1) 円 $x^2+y^2=8$ の中心 O と直線 $x-y+2=0$ との距離は,

$$\frac{|0-0+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<(\text{円の半径})$$

であるから, 直線は円と異なる 2 点で交わる.



交点を P, Q とし, 弦 PQ の中点を M とすると,

$$\mathrm{OM}\perp\mathrm{PQ}$$

であるから, 三角形 OPM に三平方の定理を用いると,

$$\begin{aligned}\mathrm{PM}&=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}\\&=\sqrt{6}.\end{aligned}$$

したがって, 切り取る線分の長さは,

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=2\mathrm{PM}\\&=2\sqrt{6}.\end{aligned}$$

(2) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+1$ の方程式を連立すると,

$$x^2=2x+1$$

であるから,

$$x^2-2x-1=0.$$

これより,

$$x=1\pm\sqrt{2}.$$

ここで,

$$\alpha=1-\sqrt{2},\quad \beta=1+\sqrt{2}$$

とし, 求める線分の長さを L とすると,

$$\begin{aligned}L&=\sqrt{1^2+2^2}(\beta-\alpha)\\&=\sqrt{5}(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

であるから,

$$L=2\sqrt{10}.$$

11-A-6 F195A

円 $x^2+y^2=5$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ.

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は,

$$x_0x+y_0y=r^2$$

であるから，求める接線の方程式は,

$$x-2y=5.$$