第１２章　図形と式２（数Ⅱ，２講分）

A問題

12-A-1　F201A

xy 平面上の 2 点 A(2, 0)，B(1, 1) に対して，等式 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=6$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

P(x, y) とすると，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=6$ より，

$$\{(x-2)^2+y^2\}+\{(x-1)^2+(y-1)^2\}=6$$

であるから，

$$2x^2+2y^2-6x-2y=0$$

$$x^2+y^2-3x-y=0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

したがって，P の軌跡は，

$$\text{円}\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

12-A-2 F202A

xy 平面上に，2 点 A(2，2)，B(7，-3) がある．

(1) 2 点 A，B から等距離にある点 P の軌跡を求めよ．

(2) 2 点 A，B からの距離の比が 3 : 2 である点 Q の軌跡を求めよ．

P(x，y) とする．

(1) 条件 AP = BP より，

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$$

であるから，

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(x-7)^2+(y+3)^2$$

$$x^2+y^2-4x-4y+8=x^2+y^2-14x+6y+58$$

$$10x-10y=50$$

$$x-y=5.$$

したがって，P の軌跡は，

$$\text{直線 } x-y=5.$$

(2) 条件 AQ : BQ = 3 : 2 より，

$$2\mathrm{AQ}=3\mathrm{BQ}$$

$$4\mathrm{AQ}^2=9\mathrm{BQ}^2$$

であるから，

$$4\{(x-2)^2+(y-2)^2\}=9\{(x-7)^2+(y+3)^2\}$$

$$4(x^2+y^2-4x-4y+8)=9(x^2+y^2-14x+6y+58)$$

$$5x^2+5y^2-110x+70y+490=0$$

$$x^2+y^2-22x+14y+98=0$$

$$(x-11)^2+(y+7)^2=72.$$

したがって，Q の軌跡は，

$$\text{円 } (x-11)^2+(y+7)^2=72.$$

12-A-3 F203A

xy 平面において，放物線 C : $y=x^2+ax+a$ が x 軸と共有点をもつように a が動くとき，C の頂点 P の軌跡を求めよ．

C の方程式を変形すると，

$$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a$$

であるから，C が x 軸と共有点をもつ条件は，

$$-\frac{a^2}{4}+a \leqq 0.$$

これより，

$$a^2-4a \geqq 0$$

$$a(a-4) \geqq 0$$

$$a \leqq 0,\quad 4 \leqq a. \qquad \cdots ①$$

また，C の頂点 P の座標を P$(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{cases} X=-\dfrac{a}{2}, & \cdots ② \\ \\ Y=-\dfrac{a^2}{4}+a. & \cdots ③ \end{cases}$$

②より，

$$a=-2X. \qquad \cdots ④$$

④を③に代入すると，

$$Y=-\frac{(-2X)^2}{4}+(-2X)$$

であるから，

$$Y=-X^2-2X. \qquad \cdots ⑤$$

また，④を①に代入すると，

$$-2X \leqq 0,\quad 4 \leqq -2X$$

であるから，

$$X \leqq -2,\quad 0 \leqq X. \qquad \cdots ⑥$$

⑤，⑥より，P の軌跡は，

放物線 $y=-x^2-2x$ の $x \leqq -2$ または $0 \leqq x$ を満たす部分．

12-A-4 F209A

次の不等式を表す領域を xy 平面に図示せよ．

(1) $x^2+y^2-2x \leqq 0$

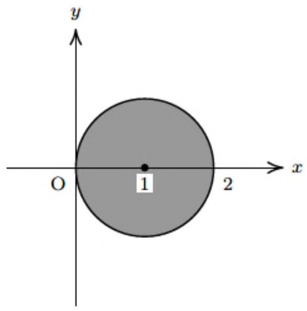
(2) $\begin{cases} y \geqq x^2 \\ x-y+2>0 \end{cases}$

(3) $|x|+|y| \leqq 2$

(1) $x^2+y^2-2x \leqq 0$ より，

$$(x-1)^2+y^2 \leqq 1$$

であるから，領域を図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界線上の点を含む．



(2) 連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2, \\ x-y+2>0 \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} y \geqq x^2, \\ y<x+2. \end{cases}$$

また，

$$x^2=x+2$$

より，

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

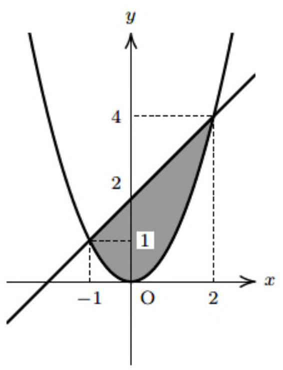
であるから，

$$x=-1,\ 2.$$

したがって，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ の交点の座標は，

$$(-1,\ 1),\ (2,\ 4).$$

以上より，領域を図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界線は直線 $y=x+2$ 上の点以外は含む．



(3) $$|x|+|y| \leqq 2 \qquad \cdots (*)$$

において，x，y の符号で場合分けをする．

(i) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，$(*)$ は，

$$x+y \leqq 2$$

であるから，

$$y \leqq -x+2.$$

(ii) $x<0$，$y \geqq 0$ のとき，$(*)$ は，

$$-x+y \leqq 2$$

であるから，

$$y \leqq x+2.$$

(iii) $x<0$，$y<0$ のとき，$(*)$ は，

$$-x-y \leqq 2$$

であるから，

$$y \geqq -x-2.$$

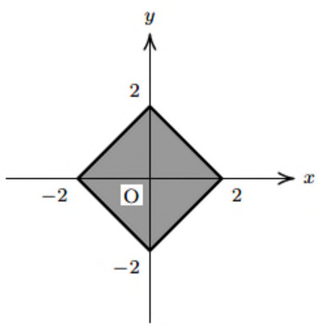
(iv) $x \geqq 0$，$y<0$ のとき，$(*)$ は，

$$x-y \leqq 2$$

であるから，

$$y \geqq x-2.$$

以上より，領域を図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界線上の点は含む．



12-A-5 F210A

方程式 $x^2+xy-6y^2-x+7y+k=0$ が xy 平面において 2 直線を表すとする．ただし，k は実数の定数とする．

(1) k の値を求めよ．

(2) 不等式 $x^2+xy-6y^2-x+7y+k \leqq 0$ の表す領域を図示せよ．

(1) 方程式

$$x^2+xy-6y^2-x+7y+k=0 \qquad \cdots ①$$

を x で整理すると，

$$x^2+(y-1)x-6y^2+7y+k=0. \qquad \cdots ②$$

②を x の方程式とみたときの判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= (y-1)^2-4(-6y^2+7y+k) \\ &= 25y^2-30y+1-4k. \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

ここで，①が 2 直線を表す条件は，③が y の完全平方式でかけることである．

③より，

$$D = 25\left(y-\frac{3}{5}\right)^2-8-4k$$

であるから，①が 2 直線を表すのは，

$$-8-4k=0$$

のとき．

よって，求める k の値は，

$$k=-2.$$

(2) (1) の結果より，不等式

$$x^2+xy-6y^2-x+7y+k \leqq 0 \qquad \cdots ④$$

は，

$$x^2+xy-6y^2-x+7y-2 \leqq 0$$

であるから，

$$(x-2y+1)(x+3y-2) \leqq 0.$$

これより，

$$\begin{cases} x-2y+1 \geqq 0, \\ x+3y-2 \leqq 0 \end{cases}$$

または，

$$\begin{cases} x-2y+1 \leqq 0, \\ x+3y-2 \geqq 0 \end{cases}$$

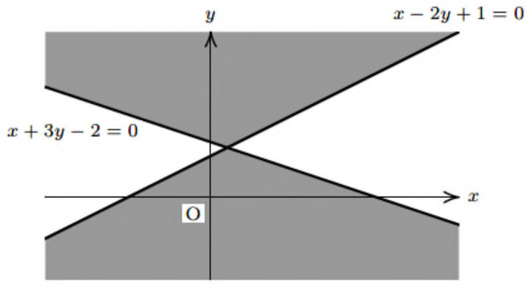
であるから，

$$\begin{cases} y \leqq \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, \\ y \leqq -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

または，

$$\begin{cases} y \geqq \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, \\ y \geqq -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

したがって，④の表す領域を図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界線上の点を含む．



((1) の別解)

①を変形すると,

$$(x+3y)(x-2y)-x+7y+k=0$$

であることに注意すると，①が 2 直線を表すのは,

$$(x+3y+a)(x-2y+b)=0 \qquad \cdots ②$$

を満たす実数 a，b が存在するときに限る.

②を展開すると,

$$x^2+xy-6y^2+(a+b)x+(-2a+3b)y+ab=0.$$

①と比較すると,

$$\begin{cases} a+b=-1, \\ -2a+3b=7, \\ ab=k. \end{cases}$$

これを解くと,

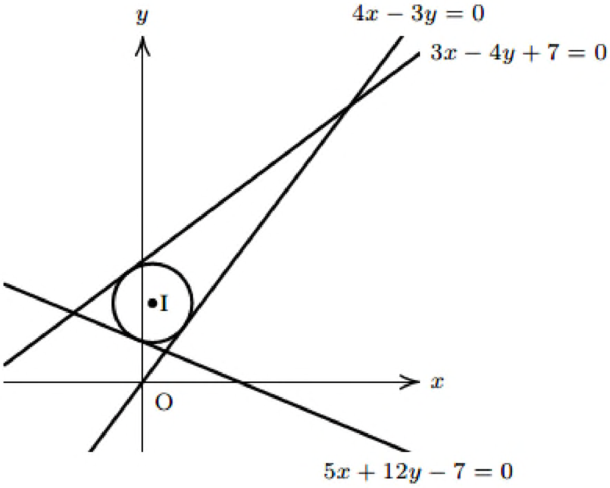
$$a=-2, \quad b=1, \quad k=-2.$$

因数分解の一意性より，実数 a，b の組はこれに限る.

((1) の別解終り)

12-A-6 F211A

3 直線 $4x-3y=0$，$3x-4y+7=0$，$5x+12y-7=0$ で作られる三角形の内接円の方程式を求めよ．



三角形の内接円の中心を I$(a,\ b)$，半径を r とすると，I と各直線との距離が r と一致するから，

$$\begin{cases} \dfrac{|4a-3b|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=r, \\[2ex] \dfrac{|3a-4b+7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r, \\[2ex] \dfrac{|5a+12b-7|}{\sqrt{5^2+12^2}}=r. \end{cases}$$

また，I は，連立不等式

$$\begin{cases} y>\dfrac{4}{3}x, \\[2ex] y<\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{4}, \\[2ex] y>-\dfrac{5}{12}x+\dfrac{7}{12} \end{cases}$$

で表される領域内にあるので，

$$\begin{cases} 4a-3b<0, \\ 3a-4b+7>0, \\ 5a+12b-7>0 \end{cases}$$

が成り立つ．

したがって，

$$\frac{-4a+3b}{5}=\frac{3a-4b+7}{5}=\frac{5a+12b-7}{13}=r.$$

これを解くと，

$$a=\frac{1}{7},\quad b=\frac{8}{7},\quad r=\frac{4}{7}.$$

よって，三角形の内接円の中心の座標は $\left(\dfrac{1}{7},\ \dfrac{8}{7}\right)$ であり，半径は $\dfrac{4}{7}$ であるから，内接円の方程式は，

$$\left(x-\frac{1}{7}\right)^2+\left(y-\frac{8}{7}\right)^2=\frac{16}{49}.$$

B問題

12-B-1 F204B

xy 平面上に，円 C : $x^2+y^2=9$ と 2 点 A(1, 5), B(−4, 1) がある．点 P が C 上を動くとき，三角形 ABP の重心 G の軌跡を求めよ．

P の座標を (p, q), G の座標を (X, Y) とすると，G が三角形 ABP の重心であることから，

$$\begin{cases} X=\dfrac{1-4+p}{3}, \\ Y=\dfrac{5+1+q}{3}. \end{cases}$$

これより，

$$p=3X+3, \quad q=3Y-6. \qquad \cdots ①$$

また，P が C 上にあることから，

$$p^2+q^2=9. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$(3X+3)^2+(3Y-6)^2=9$$

であるから，

$$(X+1)^2+(Y-2)^2=1.$$

また，直線 AB の方程式は，

$$y=\frac{1-5}{-4-1}(x-1)+5$$

であるから，

$$4x-5y+21=0.$$

これと C の中心との距離について，

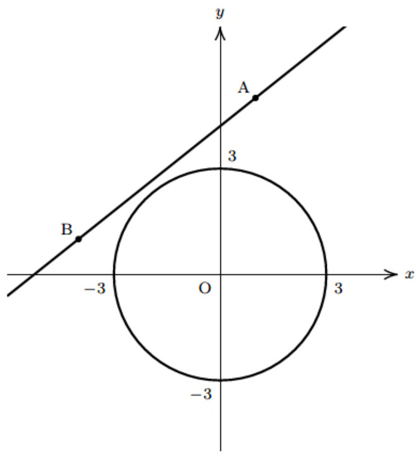
$$\frac{21}{\sqrt{4^2+(-5)^2}}=\frac{21}{\sqrt{41}}>(C\text{ の半径})$$

が成り立つので，直線 AB は円 C と共有点をもたない．

したがって，P がどのように動いても三角形 ABP の重心 G は存在する．

以上より，P の軌跡は，

$$\text{円 } (x+1)^2+(y-2)^2=1.$$



12-B-2　F205B

k は実数の定数とする．xy 平面において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=k(x-1)$ は異なる 2 点 P，Q で交わっている．

k の値が変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ．

(1)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=k(x-1)$ が異なる 2 点で交わるのは，x の方程式

$$x^2=k(x-1),$$

すなわち，

$$x^2-kx+k=0 \qquad \cdots ①$$

が異なる 2 つの実数解をもつことである．

したがって，

$$(①\text{の判別式})>0$$

であるから，

$$(-k)^2-4k>0$$

$$k(k-4)>0.$$

これより，求める k の値の範囲は，

$$k<0,\quad 4<k. \qquad \cdots ②$$

(2)　①の実数解を α，β とすると，α，β は P，Q の x 座標と一致する．

このとき，M の座標を $(X,\ Y)$ とすると，

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \cdots ③$$

であり，M が直線 $y=k(x-1)$ 上にあることから，

$$Y=k(X-1). \qquad \cdots ④$$

また，①において，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=k. \qquad \cdots ⑤$$

③，⑤より，

$$k=2X. \qquad \cdots ⑥$$

④，⑥より，

$$Y=2X(X-1). \qquad \cdots ⑦$$

また，②，⑥より，

$$2X<0,\quad 4<2X$$

であるから，

$$X<0,\quad 2<X. \qquad \cdots ⑧$$

⑦，⑧より，M の軌跡は，

放物線 $y=2x(x-1)$ の $x<0$ または $2<x$ を満たす部分．

12-B-3 F206B

実数 m が変化するとき，2 直線 $mx-y+5m=0$，$x+my-5=0$ の交点 P の軌跡を求めよ．

P の座標を (X，Y) とすると，

$$mX-Y+5m=0, \qquad \cdots ①$$

$$X+mY-5=0. \qquad \cdots ②$$

X の値で場合分けをする．

(i) $X \neq -5$ のとき，①より，

$$m(X+5)=Y$$

$$m=\frac{Y}{X+5}. \qquad \cdots ③$$

③を②に代入すると，

$$X+\frac{Y^2}{X+5}-5=0$$

であるから，

$$X(X+5)+Y^2-5(X+5)=0$$

$$X^2+Y^2=25. \qquad \cdots ④$$

(ii) $X=-5$ のとき，①より，

$$Y=0.$$

(X，Y) = (-5，0) のとき，

$$(②の左辺)=-5+m\cdot 0-5$$

$$=-10$$

であるから，点 (-5，0) は交点になり得ない．

以上より，P の軌跡は，

円 $x^2+y^2=25$ の点 (-5，0) を除く部分．

12-B-4 F212B

連立不等式 $x^2+y^2-8x-6y+24 \leqq 0$，$2x+y \geqq 12$ で表される領域を D とする．

(1) D を図示せよ．

(2) 点 $(x,\ y)$ が D 内を動くとき，次の式の最大値，最小値を求めよ．

(i) $3x+y$

(ii) x^2+y^2

(1) 不等式 $x^2+y^2-8x-6y+24 \leqq 0$ を変形すると，

$$(x-4)^2+(y-3)^2 \leqq 1.$$

また，不等式 $2x+y \geqq 12$ を変形すると，

$$y \geqq -2x+12.$$

さらに，

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-3)^2=1, \\ y=-2x+12 \end{cases}$$

より，

$$(x-4)^2+(-2x+9)^2=1$$

であるから，

$$5x^2-44x+96=0$$

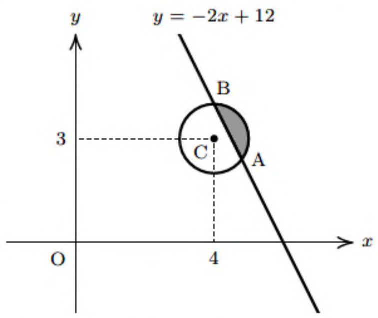
$$(5x-24)(x-4)=0$$

$$x=\frac{24}{5},\ 4.$$

よって，円 $(x-4)^2+(y-3)^2=1$ と直線 $y=-2x+12$ の交点の座標は，

$$\mathrm{A}\left(\frac{24}{5},\ \frac{12}{5}\right),\ \mathrm{B}(4,\ 4).$$

以上より，D を図示すると，次の図の網目部分である．



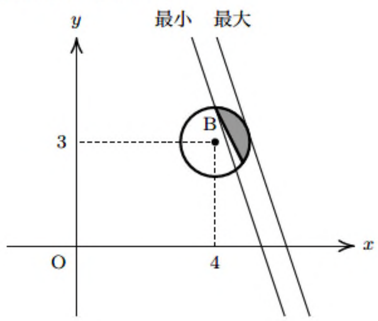
(2) それぞれの式の値を図形量に読みかえる．

(i) $3x+y=k$ とすると，

$$y=-3x+k \qquad \cdots (*)$$

であるから，$(*)$ は傾き -3，y 切片 k の直線を表す．

したがって，$(*)$ が D と共有点をもちながら変化するときの $(*)$ の y 切片の動きを調べればよい．



k の最大値は，$(*)$ が円 C : $(x-4)^2+(y-3)^2=1$ と接するときの k の値の大きい方の値である．

ここで，$(*)$，すなわち，$3x+y-k=0$ が C と接する条件は，

$$\frac{|3\cdot 4+3-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=1$$

$$|k-15|=\sqrt{10}$$

$$k=15\pm\sqrt{10}$$

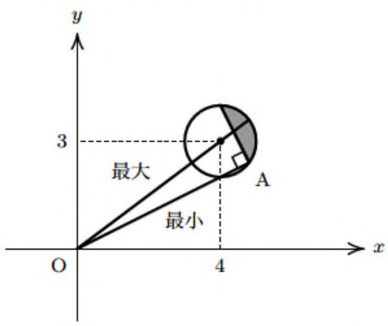
であるから，k の最大値は，

$$k=15+\sqrt{10}.$$

また，k の最小値は，$(*)$ が点 B を通るときの k の値であるから，

$$3\cdot 4+4=16.$$

(ii) x^2+y^2 は原点と点 $(x,\ y)$ との距離の 2 乗を表すので，原点と D 内の点との距離について考えればよい．



ここで，原点から直線 $y=-2x+12$ に下ろした垂線の足の座標は，

$$-2x+12=\frac{1}{2}x$$

より，

$$x=\frac{24}{5}$$

であるから，

$$\left(\frac{24}{5},\ \frac{12}{5}\right).$$

これは点 A と一致するので，x^2+y^2 の最小値は，

$$\left(\frac{24}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{144}{5}.$$

また，x^2+y^2 が最大となるのは，点 $(x,\ y)$ が直線 $y=\frac{3}{4}x$ と C との交点のうち，原点から遠い点のときであるから，x^2+y^2 の最大値は，

$$(\sqrt{4^3+3^2}+1)^2=36.$$

12-B-5 F213B

直線 $y = ax + b$ が，2 点 $(-3,\ 2)$，$(2,\ -3)$ を結ぶ線分と共有点をもつとき，点 $(a,\ b)$ の存在範囲を ab 平面に図示せよ．

$f(x,\ y) = ax - y + b$ とすると，直線 $y = ax + b$ が 2 点 $(-3,\ 2)$，$(2,\ -3)$ を結ぶ線分と共有点をもつ条件は，

$$f(-3,\ 2) \cdot f(2,\ -3) \leqq 0$$

であるから，

$$(-3a - 2 + b)(2a + 3 + b) \leqq 0.$$

これより，

$$\begin{cases} -3a - 2 + b \geqq 0, \\ 2a + 3 + b \leqq 0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} -3a - 2 + b \leqq 0, \\ 2a + 3 + b \geqq 0 \end{cases}$$

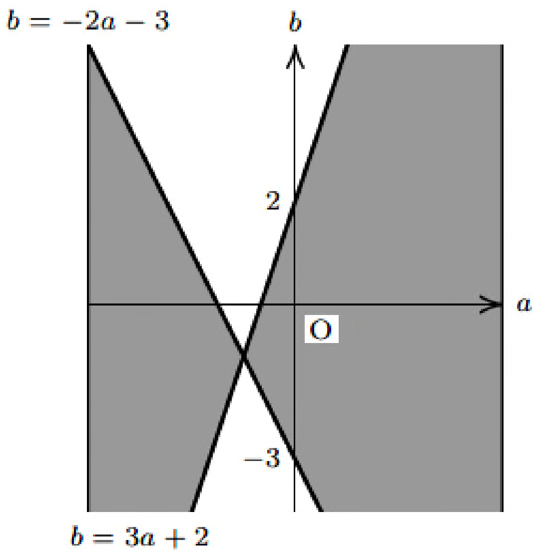
であるから，

$$\begin{cases} b \geqq 3a + 2, \\ b \leqq -2a - 3 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} b \leqq 3a + 2, \\ b \geqq -2a - 3. \end{cases}$$

したがって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界線上の点は含む．



12-B-6 F214B

実数 x，y に対して，2 つの条件

$$P\ :\ |x|+|2y|\leqq 2,$$
$$Q\ :\ x^2+y^2\leqq r^2$$

がある．ただし，r は正の実数とする．

(1) P が Q であるための必要条件となるような r の値の範囲を求めよ．

(2) P が Q であるための十分条件となるような r の値の範囲を求めよ．

条件 P を表す不等式

$$|x|+|2y|\leqq 2$$

は，

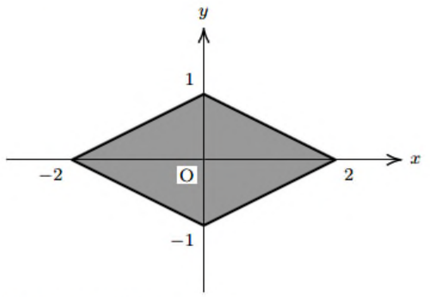
(i) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，$x+2y\leqq 2$，　すなわち，$y\leqq -\frac{1}{2}x+1$

(ii) $x<0$，$y\geqq 0$ のとき，$-x+2y\leqq 2$，　すなわち，$y\leqq \frac{1}{2}x+1$

(iii) $x<0$，$y<0$ のとき，$-x-2y\leqq 2$，　すなわち，$y\geqq -\frac{1}{2}x-1$

(iv) $x\geqq 0$，$y<0$ のとき，$x-2y\leqq 2$，　すなわち，$y\geqq \frac{1}{2}x-1$

であるから，条件 P を満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲は次の図の網目部分である．ただし，境界上の点を含む．



また，条件 Q を表す不等式

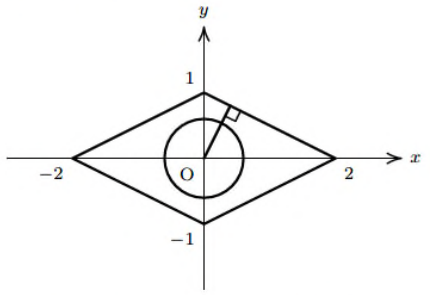
$$x^2+y^2\leqq r^2$$

を満たす点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，原点 $(0,\ 0)$ を中心とする半径 r の円の周および内部である．

(1) P が Q であるための必要条件となるのは，

$$Q\ \subset\ P$$

が成り立つときである．



原点から直線 $x+2y-2=0$ に下ろした垂線の長さは，

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

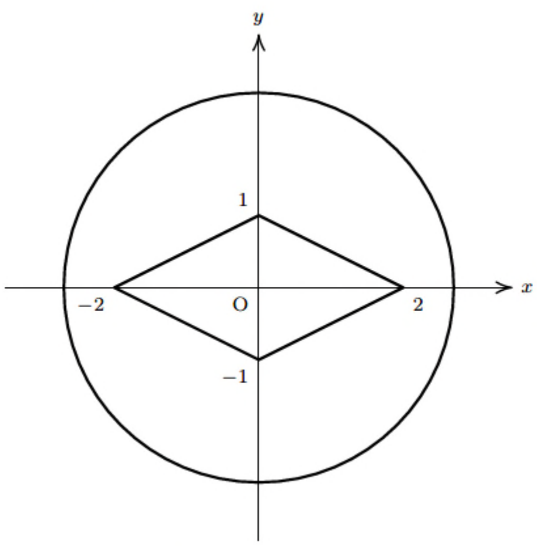
であるから，求める r の値の範囲は，

$$0<r\leqq\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(2) P が Q であるための十分条件となるのは，

$$P\ \subset\ Q$$

が成り立つときである．



図より，求める r の値の範囲は，

$$r\geqq 2.$$

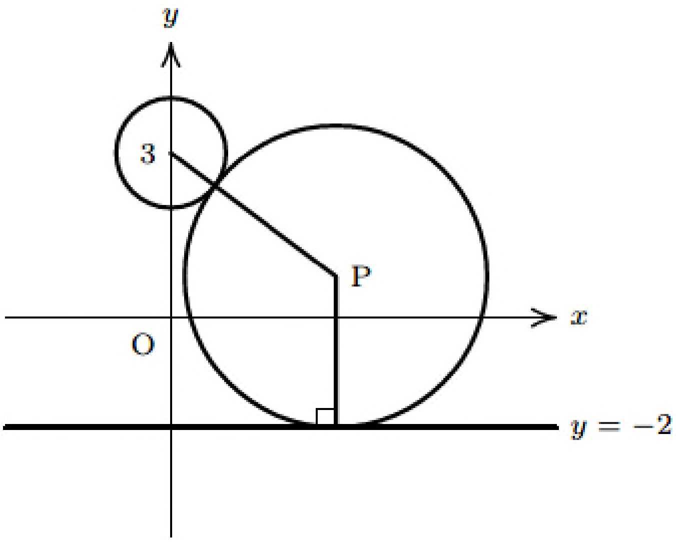
12-B-7 F215C 改

t がすべての実数をとって変化するとき，xy 平面上の直線 $y=2tx-t^2$ が通り得る領域を図示せよ。

C 問題

12-C-1 F207C

円 $x^2+(y-3)^2=1$ に外接し，直線 $y=-2$ に接するような円の中心 P の軌跡を求めよ．



円 $x^2+(y-3)^2=1$ が直線 $y=-2$ の上方にあるので，P の座標を $(X,\ Y)$ とすると，

$$Y > -2.$$

したがって，直線 $y=-2$ に接する円の半径は，

$$Y+2.$$

また，2 円が外接する条件は，

$$(2\text{ 円の中心間の距離}) = (2\text{ 円の半径の和})$$

であるから，

$$\sqrt{X^2+(Y-3)^2} = (Y+2)+1$$

$$\sqrt{X^2+(Y-3)^2} = Y+3.$$

両辺を 2 乗すると，

$$X^2+(Y-3)^2=(Y+3)^2$$

であるから，

$$Y=\frac{1}{12}X^2.$$

したがって，P の軌跡は，

$$\text{放物線 } y=\frac{1}{12}x^2.$$

12-C-2 F8C

原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円に，円外の点 P から 2 本の接線を引く．このとき，2 つの接点を結ぶ線分の中点を Q とする．

(1) $\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 1$ が成り立つことを示せ．

(2) P が直線 $x + y = 2$ 上を動くとき，Q の軌跡を求めよ．

(1) 2 つの接点を S，T とすると，2 つの三角形 OSP，OTP は直線 OP に関して対称であるから，

$$\mathrm{OP} \perp \mathrm{ST}.$$

また，

$$\angle\mathrm{OSP} = 90^\circ.$$

したがって，

$$\triangle\mathrm{OSP} \backsim \triangle\mathrm{OQS}$$

が成り立つので，

$$\mathrm{OP} : \mathrm{OS} = \mathrm{OS} : \mathrm{OQ}.$$

これより，

$$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = \mathrm{OS}^2$$

であり，$\mathrm{OS} = 1$ であるから，

$$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 1.$$

(2) $\mathrm{P}(p,\ q)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，P が半直線 OQ 上にあるから，正の実数 k を用いて，

$$\begin{cases} p = kX, \\ q = kY \end{cases} \qquad \cdots ①$$

と表すことができる．

また，P が直線 $x + y = 2$ 上にあるので，

$$p + q = 2. \qquad \cdots ②$$

さらに，(1) より，

$$\sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} = 1. \qquad \cdots ③$$

①，③より，

$$\sqrt{k^2(X^2 + Y^2)} \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} = 1$$

であるから，$k > 0$ より，

$$k = \frac{1}{X^2 + Y^2}.$$

①より，

$$\begin{cases} p = \dfrac{X}{X^2 + Y^2}, \\ q = \dfrac{Y}{X^2 + Y^2}. \end{cases} \qquad \cdots ④$$

②，④より，

$$\frac{X}{X^2 + Y^2} + \frac{Y}{X^2 + Y^2} = 2$$

であるから，

$$X^2 + Y^2 = \frac{X}{2} + \frac{Y}{2} \text{ かつ } X^2 + Y^2 \neq 0$$

$$\left(X - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(Y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} \text{ かつ } X^2 + Y^2 \neq 0.$$

したがって，Q の軌跡は，

円 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$ の原点を除く部分．

((1) の別解)

$\mathrm{P}(p,\ q)$ とすると，2 つの接点を通る直線の方程式は，

$$px + qy = 1.$$

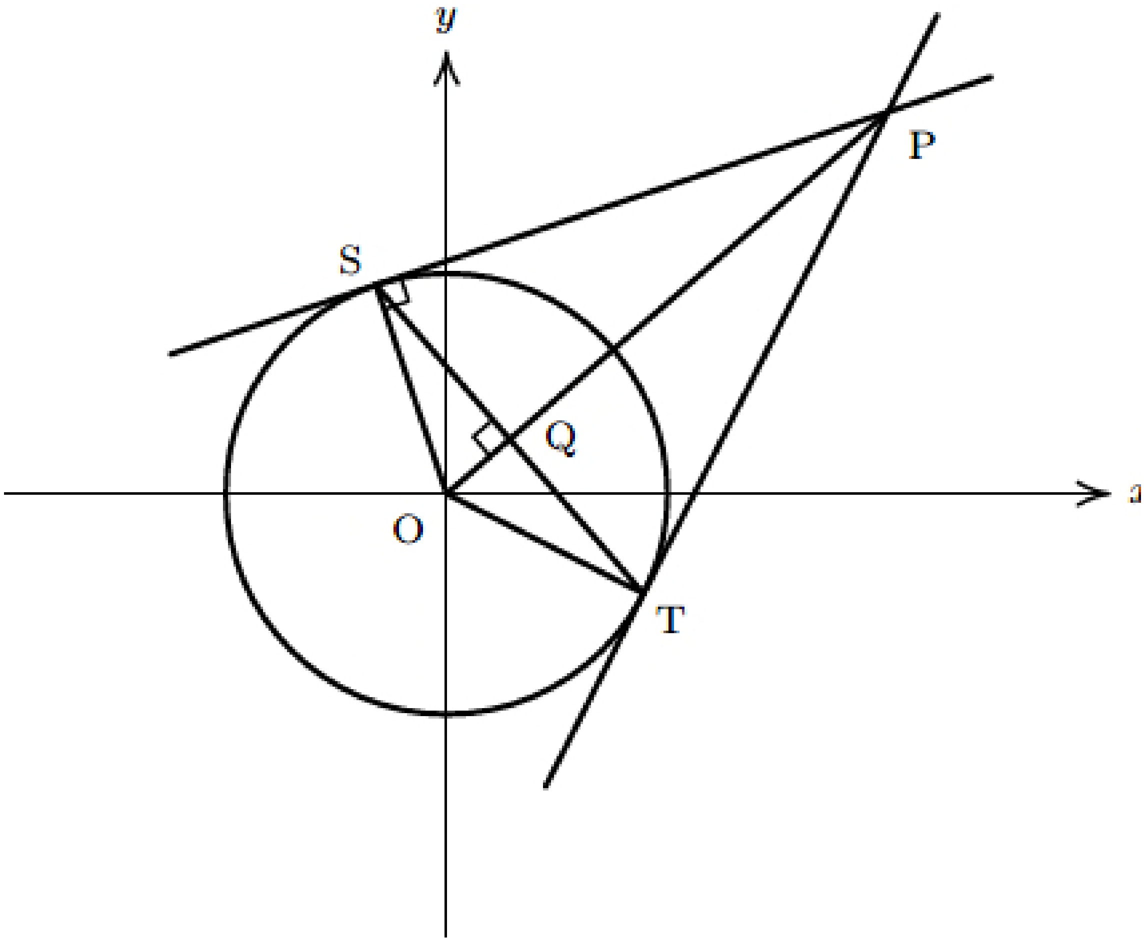
これと原点との距離は，線分 OQ の長さと一致するので，

$$\mathrm{OQ} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

したがって，

$$\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 1.$$

((1) の別解終り)



12-C-3 F チャレ 26

点 (5, 0) を通り，傾きが a の直線が円 $x^2+y^2=9$ と異なる 2 点 P，Q で交わるとき，線分 PQ の中点を M とする．a を動かすとき，M の軌跡を求めよ．

点 (5, 0) を通り，傾きが a である直線 PQ の方程式は，

$$y=a(x-5)$$

であるから，

$$ax-y-5a=0.$$

円 C : $x^2+y^2=9$ の中心 O と直線 PQ との距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d&=\frac{|-5a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}\\ &=\frac{|5a|}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

であり，直線 PQ が C と 2 点で交わる条件は，

$$d<(C\text{ の半径})$$

であるから，

$$\frac{|5a|}{\sqrt{a^2+1}}<3.$$

これより，

$$|5a|<3\sqrt{a^2+1}$$

であるから，

$$\begin{gathered} 25a^2<9(a^2+1)\\ 16a^2-9<0\\ (4a+3)(4a-3)<0\\ -\frac{3}{4}<a<\frac{3}{4}. \qquad \cdots ① \end{gathered}$$

また，

$$\mathrm{OM}\perp\mathrm{PQ}$$

であるから，直線 OM の方程式は，

$$x+ay=0.$$

M は直線 $ax-y-5a=0$，$x+ay=0$ の交点であるから，M の座標を (X, Y) とすると，

$$aX-Y-5a=0, \qquad \cdots ②$$

$$X+aY=0. \qquad \cdots ③$$

X の値で場合分けをする．

(i) $X\neq5$ のとき，

②より，

$$a(X-5)=Y$$

であるから，

$$a=\frac{Y}{X-5}. \qquad \cdots ④$$

④を③に代入すると，

$$X+\frac{Y^2}{X-5}=0$$

であるから，

$$\begin{gathered} X(X-5)+Y^2=0\\ \left(X-\frac{5}{2}\right)^2+Y^2=\frac{25}{4}. \end{gathered}$$

(ii) $X=5$ のとき，

②より，

$$Y=0.$$

$X=5$，$Y=0$ のとき，

$$\begin{aligned} (③\text{の左辺})&=5+a\cdot0\\ &=5 \end{aligned}$$

であるから，点 (5, 0) は交点になり得ない．

(i)，(ii)，①より，M の軌跡は，

円 $\left(X-\frac{5}{2}\right)^2+Y^2=\frac{25}{4}$ の

$-\frac{3}{4}(x-5)<y<\frac{3}{4}(x-5)$ を満たす部分

12-C-4　F215C 改

t が $0 \leqq t \leqq 1$ を満たしながら変化するとき，xy 平面上の直線 $y=2tx-t^2$ が通り得る領域を図示せよ。

12-C-5 F24C

実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら動くときの点 $(x+y,\ xy)$ の動く領域を求めよ．

$$x^2+y^2 \leqq 1$$

を変形すると，

$$(x+y)^2-2xy \leqq 1$$

であるから，

$$u=x+y,\quad v=xy \qquad \cdots ①$$

より，

$$u^2-2v \leqq 1.$$

したがって，

$$v \geqq \frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}. \qquad \cdots ②$$

また，①より，x，y は t の 2 次方程式

$$t^2-ut+v=0 \qquad \cdots ③$$

の実数解である．

③が実数解をもつ条件は，

$$(\text{③の判別式}) \geqq 0$$

より，

$$(-u)^2-4v \geqq 0$$

であるから，

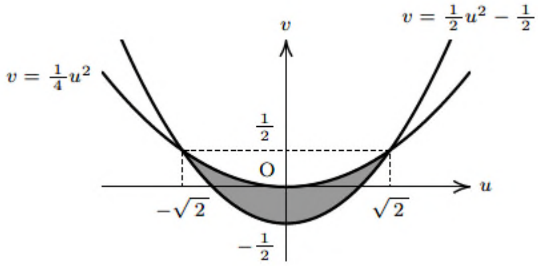
$$v \leqq \frac{1}{4}u^2. \qquad \cdots ④$$

②，④より，点 $(x+y,\ xy)$，すなわち，点 $(u,\ v)$ の存在する範囲は，不等式

$$\begin{cases} v \geqq \dfrac{1}{2}u^2-\dfrac{1}{2}, \\ v \leqq \dfrac{1}{4}u^2 \end{cases}$$

で表される領域である．

これを図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界線上の点はすべて含む．



演習問題

12-E-1

k は定数とする．方程式

$$x^2+y^2+2(k+1)x-2(k-1)y+4k^2=0 \qquad \cdots (*)$$

がある．

(1)　$(*)$ が xy 平面において円を表すような k の値の範囲を求めよ．

(2)　k が (1) で求めた範囲を動くとき，円の中心 P の軌跡を求めよ．

(1)　$-1<k<1$

(2)　直線 $x+y=-2$ の $-2<x<0$ を満たす部分．

12-E-2

点 A$(2,\ -2)$ と放物線 $y=x^2$ 上の点 Q を結ぶ線分 AQ を 1 : 2 に内分する点 P の軌跡を求めよ．

放物線 $y=3x^2-8x+4$．

12-E-3

実数 x, y, z は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする.

(1) x の最大値と y の最小値を求めよ.

(2) $3x-y+z$ の値の範囲を求めよ.

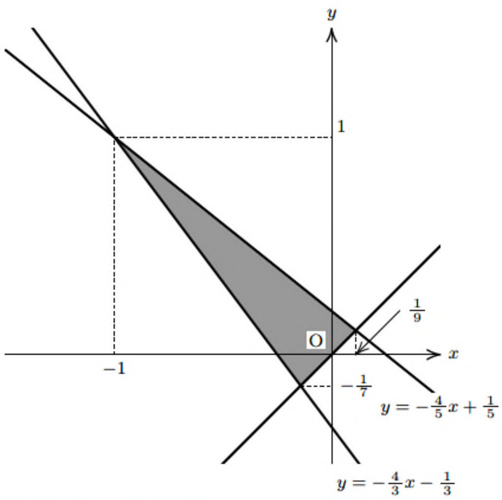
(1) $4x+3y+2z=1$ より,

$$z=\frac{1}{2}(1-4x-3y)$$

であるから, $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ は,

$$\begin{cases} y \geqq x, \\ y \leqq -\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}, \\ y \geqq -\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}. \end{cases}$$

これより, 点 (x, y) の存在範囲を図示すると, 次の図の網目部分である.



したがって, x の最大値は,

$$\frac{1}{9}$$

であり, y の最小値は,

$$-\frac{1}{7}.$$

(2) $3x-y+z=k$ とすると,

$$3x-y+\frac{1}{2}(1-4x-3y)=k$$

であるから,

$$y=\frac{2}{5}x+\frac{1-2k}{5}.$$

これは傾きが $\frac{2}{5}$, y 切片が $\frac{1-2k}{5}$ の直線を表すから, (1) の領域と共有点をもちながら変化するとき, y 切片の動きを調べればよい.

k が最大となるのは,

$$(x, y)=\left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right)$$

のときであるから, k の最大値は,

$$\frac{5}{7}.$$

また, k が最小となるのは,

$$(x, y)=(-1, 1)$$

のときであるから, k の最小値は,

$$-3.$$

したがって, $3x-y+z$ の値の範囲は,

$$-3 \leqq 3x-y+z \leqq \frac{5}{7}.$$

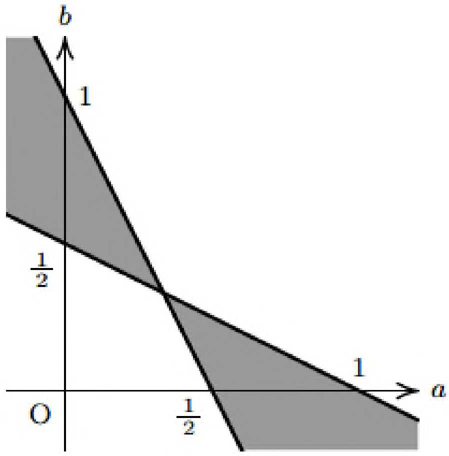
12-E-4

xy 平面上に 2 点 A$(1,\ 2)$，B$(2,\ 1)$ があり，直線 l : $ax+by=1$ が線分 AB(端点を含む) と共有点をもつように動く．

(1)　点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め，ab 平面上に図示せよ．

(2)　原点と l との距離の最大値を求めよ．

(1)
$$f(x,\ y)=ax+by-1$$
とおくと，l が線分 AB と共有点をもつ条件は，
$$f(1,\ 2)\cdot f(2,\ 1)\leqq 0$$
であるから，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，
$$(a+2b-1)(2a+b-1)\leqq 0$$
で表され，ab 平面上に図示すると，次の図の網目部分である．ただし，境界線上の点を含む．



(2)　xy 平面上において，原点と l との距離を d とすると，
$$d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
であるから，
$$d\text{ が最大}\iff\sqrt{a^2+b^2}\text{ が最小}$$
が成り立つ．

ここで，点 $(a,\ b)$ が (1) で求めた領域内を動くとき，$\sqrt{a^2+b^2}$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$ 間の距離を表すから，$\sqrt{a^2+b^2}$ の最小値は，点 $(0,\ 0)$ と直線 $a+2b-1=0$ （または直線 $2a+b-1=0$）との距離なので，
$$(\sqrt{a^2+b^2}\text{ の最小値})=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$
よって，d の最大値は，
$$\sqrt{5}.$$

12-E-5

xy 平面上の 2 点を A(1, 0), B(2, 0) とし，直線 l を $y=mx$ とする．ただし，$m\neq 0$ とする．

(1) AP + BP が最小になる l 上の点 P の座標を m を用いて表せ．

(2) m が変化するとき，P の描く図形を求めよ．

(1) l に関して，A と対称な点 C の座標を $(a,\ b)$ とすると，

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a-1}\cdot m=-1, \\ \dfrac{b}{2}=m\left(\dfrac{a+1}{2}\right) \end{cases}$$

であるから，

$$\mathrm{C}\left(\frac{1-m^2}{1+m^2},\ \frac{2m}{1+m^2}\right).$$

さらに，直線 BC と l との交点が P である．

ここで，直線 BC の方程式は，

$$y=-\frac{2m}{3m^2+1}(x-2)$$

であるから，

$$\mathrm{P}\left(\frac{4}{3(m^2+1)},\ \frac{4m}{3(m^2+1)}\right).$$

(2) P$(X,\ Y)$ とすると，(1) の結果より，

$$\begin{cases} Y=mX, \\ X=\dfrac{4}{3(m^2+1)} \end{cases}$$

であるから，

$$X\neq 0.$$

さらに，

$$X=\frac{4}{3\left\{\left(\dfrac{Y}{X}\right)^2+1\right\}}$$

であるから，

$$\left(X-\frac{2}{3}\right)^2+Y^2=\frac{4}{9}. \qquad \cdots ①$$

また，$m\neq 0$ より，

$$Y\neq 0. \qquad \cdots ②$$

①，②より，P の軌跡は，

円 $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{4}{9}$ の 2 点 $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ を除く部分．