第11章　図形と式 I（数 II，2講分）

A問題

11-A-1　F185A

2 点 A$(-1,\ 3)$，B$(2,\ -6)$ がある．

(1) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 C の座標を求めよ．

(3) 線分 AB を 2 : 1 に外分する点 D の座標を求めよ．

(1) 2 点間の距離公式より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-6-3)^2}\\ &= \sqrt{90}\\ &= 3\sqrt{10}.\end{aligned}$$

(2) 内分公式より，C の座標は，

$$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2+1},\quad \frac{1\cdot 3+2\cdot(-6)}{2+1}\right)=(1,\quad -3).$$

(3) 外分公式より，D の座標は，

$$\left(\frac{-1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2-1},\quad \frac{-1\cdot 3+2\cdot(-6)}{2-1}\right)=(5,\quad -15).$$

11-A-2　F186A

直線 $3x-y+2=0$ に関して点 A$(-4,\ 0)$ と対称な点 B の座標を求めよ．

直線 l : $3x-y+2=0$ に関して，2 点 A，B が対称である条件は，l が線分 AB の垂直二等分線になることであるから，

$$\begin{cases} l \perp \mathrm{AB}, \\ \text{線分 AB の中点が } l \text{ 上}. \end{cases}$$

ここで，l の方程式が

$$y=3x+2$$

となることに注目すると，B の座標が $(a,\ b)$ のとき，条件は，

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a-(-4)}\cdot 3=-1, \\[2mm] \dfrac{b}{2}=3\cdot\dfrac{a-4}{2}+2. \end{cases}$$

これより，

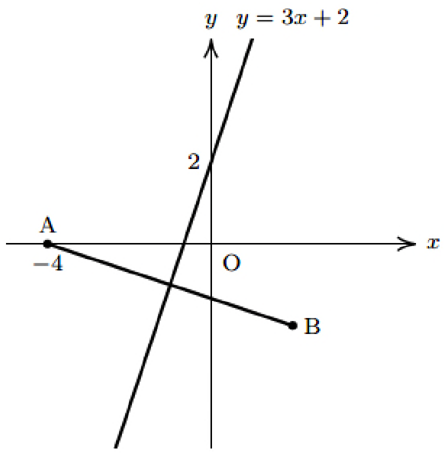
$$\begin{cases} a+3b=-4, \\ 3a-b=8 \end{cases}$$

であるから，

$$a=2,\quad b=-2.$$

したがって，求める B の座標は，

$$\mathrm{B}(2,\quad -2).$$



11-A-3　F187A

xy 平面における 2 直線 l : $(a+1)x+(a+2)y-4=0$, m : $6x+(2a-3)y-5=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値をそれぞれ求めよ．

(1) l と m は平行である．

(2) l と m が垂直である．

(1) l と m が平行である条件は，

$$(a+1)(2a-3)-6(a+2)=0$$

であるから，

$$2a^2-7a-15=0$$

$$(2a+3)(a-5)=0.$$

したがって，

$$a=-\frac{3}{2},\quad 5.$$

(2) l と m が垂直である条件は，

$$6(a+1)+(a+2)(2a-3)=0$$

であるから，

$$2a^2+7a=0$$

$$a(2a+7)=0.$$

したがって，

$$a=0,\quad -\frac{7}{2}.$$

11-A-4　F193A

次の円の方程式を求めよ．

(1) 2 点 (-1, -1), (5, 7) を直径の両端とする円．

(2) 中心の座標が (-3, -4) で，x 軸に接する円．

(3) 3 点 (-4, 6), (2, 6), (-5, -1) を通る円．

(1) 2 点 (-1, -1), (5, 7) を結ぶ線分の中点の座標は，

$$(2,\ 3)$$

であり，2 点 (2, 3), (5, 7) 間の距離は，

$$\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2}=5$$

であるから，求める円の方程式は，

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25.$$

(2) 中心の y 座標が -4 で，円が x 軸に接するので，円の半径は，

$$|-4|=4.$$

したがって，求める円の方程式は，

$$(x+3)^2+(y+4)^2=16.$$

(3) 円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とすると，3 点 (-4, 6), (2, 6), (-5, -1) を通ることから，

$$\begin{cases} 52-4a+6b+c=0, \\ 40+2a+6b+c=0, \\ 26-5a-b+c=0. \end{cases}$$

これを解くと，

$$a=2,\quad b=-4,\quad c=-20$$

であるから，求める円の方程式は，

$$x^2+y^2+2x-4y-20=0.$$

11-A-5 F194A

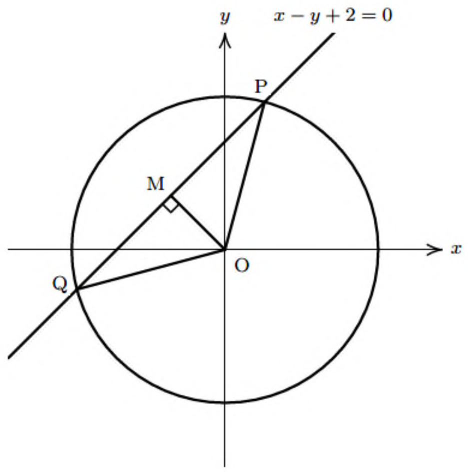
(1) 円 $x^2+y^2=8$ が直線 $x-y+2=0$ から切り取る線分の長さを求めよ.

(2) 放物線 $y=x^2$ が直線 $y=2x+1$ から切り取る線分の長さを求めよ.

(1) 円 $x^2+y^2=8$ の中心 O と直線 $x-y+2=0$ との距離は,

$$\frac{|0-0+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<(\text{円の半径})$$

であるから，直線は円と異なる 2 点で交わる.



交点を P，Q とし，弦 PQ の中点を M とすると,

$$\mathrm{OM}\perp\mathrm{PQ}$$

であるから，三角形 OPM に三平方の定理を用いると,

$$\begin{aligned}\mathrm{PM}&=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}\\&=\sqrt{6}.\end{aligned}$$

したがって，切り取る線分の長さは,

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}&=2\mathrm{PM}\\&=2\sqrt{6}.\end{aligned}$$

(2) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+1$ の方程式を連立すると,

$$x^2=2x+1$$

であるから,

$$x^2-2x-1=0.$$

これより,

$$x=1\pm\sqrt{2}.$$

ここで,

$$\alpha=1-\sqrt{2},\quad \beta=1+\sqrt{2}$$

とし，求める線分の長さを L とすると,

$$\begin{aligned}L&=\sqrt{1^2+2^2}(\beta-\alpha)\\&=\sqrt{5}(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

であるから,

$$L=2\sqrt{10}.$$

11-A-6 F195A

円 $x^2+y^2=5$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ．

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は，

$$x_0x+y_0y=r^2$$

であるから，求める接線の方程式は，

$$x-2y=5.$$

B問題

11-B-1 F188B

k を定数とするとき，直線 $(3k+1)x+(4k-3)y+6k+2=0$ は定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

直線 $(3k+1)x+(4k-3)y+6k+2=0$ が定点 $(a,\ b)$ を通る条件は，どのような実数 k に対しても

$$(3k+1)a+(4k-3)b+6k+2=0 \qquad \cdots (*)$$

を満たす実数 a，b が存在することである．

$(*)$ を k で整理すると，

$$a-3b+2+k(3a+4b+6)=0.$$

これがどのような k に対しても成り立つ条件は，

$$\begin{cases} a-3b+2=0, \\ 3a+4b+6=0. \end{cases}$$

これを解くと，

$$(a,\ b)=(-2,\ 0).$$

実数 a，b が存在するから，直線 $(3k+1)x+(4k-3)y+6k+2=0$ は定点 $(-2,\ 0)$ を通る．

11-B-2　F189B

xy 平面上において，放物線 C : $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ の交点を A，B とする．
ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいものとする．

(1) A，B の x 座標をそれぞれ求めよ．

(2) P が C 上を A から B まで動くとき，三角形 PAB の面積の最大値を求めよ．

(1)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ の方程式を連立すると，

$$x^2=2x+3$$

であるから，

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

$$x=-1,\quad 3.$$

これより，A，B の x 座標はそれぞれ，

$$-1,\quad 3.$$

(2)　P の x 座標を t とすると，題意より，

$$-1<t<3.$$

2 直線 $y=2x+3$，$x=t$ の交点を Q とすると，

$$\mathrm{Q}(\,t,\quad 2t+3\,)$$

であり，

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\{3-(-1)\}$$
$$=2\mathrm{PQ}$$

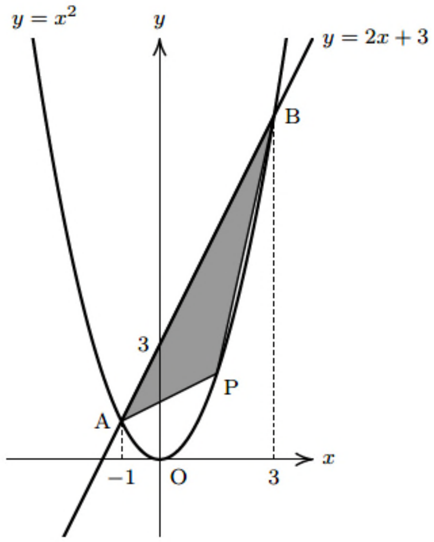
であるから，

$$\triangle\mathrm{PAB}=2(2t+3-t^2)$$
$$=-2(t-1)^2+8.$$

したがって，三角形 PAB の面積は P(1，1) のとき，

最大値 8

をとる．



11-B-3 F190B

xy 平面上において，点 (1, -1) と直線 $(3+2k)x+(4-k)y+5-3k=0$ との距離の最大値を求めよ．

点 (1, -1) と直線 $(3+2k)x+(4-k)y+5-3k=0$ との距離を d とすると，

$$d=\frac{|(3+2k)-(4-k)+5-3k|}{\sqrt{(3+2k)^2+(4-k)^2}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{5k^2+4k+25}}$$

であるから，

$$d\text{が最大} \iff 5k^2+4k+25\text{が最小}$$

が成り立つ．

ここで，

$$f(k)=5k^2+4k+25$$

とすると，

$$f(k)=5\left(k+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{121}{5}$$

であるから，d は $k=-\dfrac{2}{5}$ のとき，

$$\text{最大値}\ \frac{4}{\sqrt{\dfrac{121}{5}}}=\frac{4\sqrt{5}}{11}$$

をとる．

11-B-4 F196B

xy 平面上に，円 C : $x^2+y^2-6x+4y+3=0$ と直線 l : $y=3x+k$ がある．ただし，k は実数の定数とする．

(1) l が C と共有点をもつような k の値の範囲を求めよ．

(2) C が l から切り取る線分の長さが $2\sqrt{5}$ であるような k の値を求めよ．

(1) C の方程式を変形すると，

$$(x-3)^2+(y+2)^2=10$$

であるから，C の中心の座標は $(3,\ -2)$ であり，半径は $\sqrt{10}$.

ここで，C の中心と l との距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d &= \frac{|3\cdot 3-(-2)+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{|k+11|}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

さらに，l が C と共有点をもつ条件は，

$$d \leqq \sqrt{10}$$

であるから，

$$\frac{|k+11|}{\sqrt{10}} \leqq \sqrt{10}.$$

これより，

$$|k+11| \leqq 10$$

であるから，

$$-10 \leqq k+11 \leqq 10.$$

したがって，求める k の値の範囲は，

$$-21 \leqq k \leqq -1.$$

(2) C と l の 2 交点を P，Q とすると，題意より，

$$\mathrm{PQ}=2\sqrt{5}.$$

また，C の中心 A から l に下ろした垂線の足を R とすると，R は線分 PQ の中点である．

さらに，

$$\mathrm{AR}=d.$$

ここで，三角形 APR に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{PR}^2+\mathrm{AR}^2=\mathrm{AP}^2$$

であるから，

$$(\sqrt{5})^2+\left(\frac{|k+11|}{\sqrt{10}}\right)^2=(\sqrt{10})^2.$$

これより，

$$(k+11)^2=50$$

であるから，求める k の値は，

$$k=-11\pm 5\sqrt{2}.$$

11-B-5 F197B

点 A(3, 1) から円 C : $x^2+y^2=8$ に引いた接線の方程式を求めよ．また，接点を T とするとき，線分 AT の長さを求めよ．

求める接線は y 軸に平行ではないので，接線 l の方程式は，

$$y=m(x-3)+1,$$

すなわち，

$$mx-y-3m+1=0$$

とおける．

l が C に接する条件は，C の中心を O とすると，

$$(\mathrm{O} \text{ と } l \text{ との距離})=(C \text{ の半径}).$$

したがって，

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{8}$$

であるから，

$$|-3m+1|=\sqrt{8(m^2+1)}$$

$$(-3m+1)^2=8(m^2+1)$$

$$m^2-6m-7=0$$

$$(m-7)(m+1)=0$$

$$m=7,\quad -1.$$

これより，求める接線の方程式は，

$$y=7(x-3)+1 \text{ または } y=-(x-3)+1$$

すなわち，

$$y=7x-20 \text{ または } y=-x+4.$$

また，$\mathrm{OT}\perp\mathrm{AT}$ であるから，三角形 OAT に三平方の定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AT}&=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OT}^2}\\&=\sqrt{(3^2+1^2)-(\sqrt{8})^2}\\&=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

11-B-6 F198B

xy 平面上に，2 円 C_1 : $x^2+y^2=5$，C_2 : $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ がある．

(1) C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わることを示せ．

(2) C_1 と C_2 の 2 つの交点を P，Q とする．

(i) 直線 PQ の方程式を求めよ．

(ii) 2 点 P，Q を通り，さらに，点 (1, 1) を通る円の方程式を求めよ．

(1) C_1 の中心の座標は O(0, 0) であり，半径は $r_1=\sqrt{5}$ である．

また，C_2 の方程式を変形すると，

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1$$

であるから，C_2 の中心の座標は A(2, 2) であり，半径は $r_2=1$ である．

2 円 C_1，C_2 の中心間の距離は，

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}&=\sqrt{2^2+2^2}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

であるから，

$$r_1-r_2<\mathrm{OA}<r_1+r_2$$

が成り立つ．

したがって，C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わる．

(2) C_1，C_2 の方程式について，

$$x^2+y^2-5=0, \qquad \cdots ①$$

$$x^2+y^2-4x-4y+7=0 \qquad \cdots ②$$

とする．

(i) ①－② より，

$$4x+4y-12=0$$

であるから，

$$x+y-3=0. \qquad \cdots ③$$

③は①，②を連立して得られる方程式であるから，2 交点 P，Q を通る図形の方程式であり，x，y の 1 次式であるから，直線を表す．

さらに，2 点を通る直線はただ 1 つであるから，直線 PQ の方程式は，

$$x+y-3=0.$$

(ii) ①，③より，

$$x^2+y^2-5+k(x+y-3)=0. \qquad \cdots ④$$

④は①と③の 2 つの交点，すなわち，P，Q を通る図形の方程式で，式の形から円の方程式である．

さらに，④が点 (1, 1) を通る条件は，

$$1^2+1^2-5+k(1+1-3)=0$$

であるから，

$$k=-3.$$

④より，

$$x^2+y^2-5-3(x+y-3)=0$$

$$x^2+y^2-3x-3y+4=0. \qquad \cdots ⑤$$

⑤は，3 点 P，Q，(1, 1) を通る円であり，3 点を通る円はただ 1 つであるから，求める円の方程式は，

$$x^2+y^2-3x-3y+4=0.$$

C問題

11-C-1 F191C

xy 平面上に 2 点 A$(-1,\ 3)$，B$(5,\ 15)$ がある．点 P が直線 $y=2x$ 上を動くとき，AP + PB の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ．

直線 $l : y = 2x$ に関して，点 A と対称な点を C$(a,\ b)$ とすると，

$$\begin{cases} l \perp \mathrm{AC}, & \cdots ① \\ \text{線分 AC の中点が } l \text{ 上}. & \cdots ② \end{cases}$$

これより，

$$\begin{cases} \dfrac{b-3}{a-(-1)} \cdot 2 = -1, \\ \dfrac{b+3}{2} = 2 \cdot \dfrac{a-1}{2} \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} a + 2b = 5, \\ 2a - b = 5. \end{cases}$$

これを解くと，

$$a = 3,\quad b = 1$$

であるから，

$$\mathrm{C}(3,\ 1).$$

この点 C に対して，

$$\mathrm{AP} = \mathrm{CP}$$

が成り立つから，

$$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} = \mathrm{CP} + \mathrm{PB}. \qquad \cdots ③$$

さらに，

$$\mathrm{CP} + \mathrm{PB} \geqq \mathrm{CB}. \qquad \cdots ④$$

④の等号が成り立つのは，3 点 C，P，B がこの順で同一直線上にあるとき．

③，④より，

$$\mathrm{AP} + \mathrm{PB} \geqq \mathrm{CB}.$$

ここで，直線 CB の方程式は，

$$y = \frac{15-1}{5-3}(x-3) + 1,$$

すなわち，

$$y = 7x - 20$$

であるから，直線 l の方程式を連立すると，

$$2x = 7x - 20.$$

これより，

$$x = 4$$

であるから，

$$y = 8.$$

したがって，求める点 P の座標は，

$$\mathrm{P}(4,\ 8).$$

さらに，AP + PB の最小値は，

$$\begin{aligned} \mathrm{CB} &= \sqrt{(5-3)^2 + (15-1)^2} \\ &= \sqrt{200} \\ &= 10\sqrt{2}. \end{aligned}$$

11-C-2 F192C

放物線 $y = x^2$ 上に，直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P，Q が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ．

2 点 P，Q が l : $y = ax + 1$ に関して対称である条件は，

$$\begin{cases} \mathrm{PQ} \perp l & \cdots ① \\ \text{線分 PQ の中点 M が } l \text{ 上.} & \cdots ② \end{cases}$$

また，P，Q が C 上にあるとき，

$$\mathrm{P}(p,\ p^2),\quad \mathrm{Q}(q,\ q^2) \qquad (p \neq q)$$

とおける．

①より，

$$\frac{q^2 - p^2}{q - p} \cdot a = -1$$

であるから，

$$p + q = -\frac{1}{a}. \qquad \cdots ③$$

また，M の座標は，

$$\left(\frac{p+q}{2},\quad \frac{p^2+q^2}{2} \right)$$

であるから，②より，

$$\frac{p^2+q^2}{2} = a \cdot \frac{p+q}{2} + 1.$$

これより，

$$(p+q)^2 - 2pq = a(p+q) + 2.$$

③を代入して整理すると，

$$pq = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - 1 \right). \qquad \cdots ⑤$$

③，④より，p，q は，t の方程式

$$t^2 + \frac{1}{a}t + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) = 0 \qquad \cdots ⑤$$

の異なる 2 つの実数解である．

したがって，⑤の判別式を D とすると，

$$D > 0$$

であるから，

$$\frac{1}{a^2} - 2\left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) > 0.$$

これより，

$$1 - 2(1 - a^2) > 0$$

であるから，

$$2a^2 - 1 > 0.$$

したがって，a のとり得る値の範囲は，

$$a < -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{\sqrt{2}} < a.$$

11-C-3 F199C

a は実数の定数とする．xy 平面上の放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-a)^2=16$ との共有点の個数を調べよ．

C_1 : $y=x^2$ と C_2 : $x^2+(y-a)^2=16$ を連立すると，

$$\begin{cases} y+(y-a)^2=16, & \cdots ① \\ y \geqq 0. & \cdots ② \end{cases}$$

y の方程式①が②の範囲で解 α をもつとき，

$$\begin{cases} \alpha>0 \text{ のとき，} & \text{異なる } x \text{ の値が 2 個，} \\ \alpha=0 \text{ のとき，} & x=0 \text{ の 1 個．} \end{cases}$$

また，①より，

$$y^2-(2a-1)y+a^2-16=0$$

であるから，

$$f(y)=y^2-(2a-1)y+a^2-16$$

とすると，

$$f(y)=\left(y-a+\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{65}{4}.$$

これより，放物線 $z=f(y)$ の軸 $y=a-\dfrac{1}{2}$ と区間 $y \geqq 0$ との位置関係で場合分けをして考える．

(i) $a-\dfrac{1}{2}<0$，すなわち，$a<\dfrac{1}{2}$ のとき，

$g(y)$ は $y=0$ のとき，最小値 a^2-16 をとる．

したがって，方程式 $g(y)=0$ の実数解は次のようになる．

(ア) $a^2-16>0$，すなわち，$a<-4$ のとき，
実数解をもたない．

(イ) $a^2-16=0$，すなわち，$a=-4$ のとき，
ただ 1 つの実数解 $y=0$ をもつ．

(ウ) $a^2-16<0$，すなわち，$-4<a<\dfrac{1}{2}$ のとき，
$y>0$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつ．

(ii) $a-\dfrac{1}{2} \geqq 0$，すなわち，$a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，

$g(y)$ は $y=a-\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 $a-\dfrac{65}{4}$ をとる．

したがって，方程式 $g(y)=0$ の実数解は次のようになる．

(エ) $a-\dfrac{65}{4}>0$，すなわち，$a>\dfrac{65}{4}$ のとき，
実数解をもたない．

(オ) $a-\dfrac{65}{4}=0$，すなわち，$a=\dfrac{65}{4}$ のとき，
$y>0$ の範囲に 1 つの実数解をもつ．

(カ) $a-\dfrac{65}{4}<0<a^2-16$，すなわち，$4<a<\dfrac{65}{4}$ のとき，
$y>0$ の範囲に 2 つの実数解をもつ．

(キ) $a^2-16=0$，すなわち，$a=4$ のとき，
$y=0$ と $y>0$ の範囲に 1 つの実数解をもつ．

(ク) $a^2-16<0$，すなわち，$\dfrac{1}{2} \leqq a<4$ のとき，
$y>0$ の範囲に 1 つの実数解をもつ．

以上より，共有点の個数を a の値で分類すると，次にようになる．

$$\begin{cases} a > \dfrac{65}{4} \text{ のとき，} & 0 \text{ 個，} \\ a = \dfrac{65}{4} \text{ のとき，} & 2 \text{ 個，} \\ 4 < a < \dfrac{65}{4} \text{ のとき，} & 4 \text{ 個，} \\ a = 4 \text{ のとき，} & 3 \text{ 個，} \\ -4 < a < 4 \text{ のとき，} & 2 \text{ 個，} \\ a = -4 \text{ のとき，} & 1 \text{ 個，} \\ a < -4 \text{ のとき，} & 0 \text{ 個．} \end{cases}$$

(部分的別解)

円の中心が原点にくるように座標変換をする．

$$\begin{cases} x = 4X, \\ y = 4Y + a \end{cases}$$

とすると，

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^2 + (y-a)^2 = 16 \end{cases}$$

は，

$$\begin{cases} 4Y + a = 16X^2, \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned} a &= 16X^2 - 4Y \\ &= 16(1 - Y^2) - 4Y \\ &= -16\left(Y + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{65}{4}. \end{aligned}$$

(部分的別解終り)

11-C-4　F200C

xy 平面上に，円 C : $x^2+y^2=r^2$ と円 C の外部の点 A$(a,\ b)$ がある．A から C に 2 本の接線を引くとき，2 つの接点を P，Q とする．ただし，r は正の定数とする．

(1) 直線 PQ の方程式を求めよ．

(2) 点 R が C の外部の点で直線 PQ 上にあるとき，R から C に引いた 2 本の接線の接点を S，T とすると，直線 ST は A を通ることを示せ．

(1) P，Q の座標をそれぞれ，

$$\mathrm{P}(x_1,\ y_1),\quad \mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$$

とすると，P，Q における接線の方程式はそれぞれ，

$$\begin{cases} x_1x+y_1y=r^2, \\ x_2x+y_2y=r^2. \end{cases}$$

これらが点 A$(a,\ b)$ を通る条件は，

$$\begin{cases} ax_1+by_1=r^2, \\ ax_2+by_2=r^2. \end{cases}$$

これらはそれぞれ，直線 $ax+by=r^2$ が P を通ること，Q を通ることを表しているから，直線 PQ の方程式は，

$$ax+by=r^2.$$

(2) R の座標を $(p,\ q)$ とすると，R が直線 PQ 上にある条件は，

$$ap+bq=r^2. \qquad \cdots (*)$$

また，(1) より，直線 ST の方程式は，

$$px+qy=r^2.$$

$(*)$ は点 A が直線 ST 上にあることを示しているから，直線 ST は A を通る．

11-C-5 Fﾁｬﾚ 25

円 $x^2+(y-2)^2=1$ を C とし，放物線 $y=x^2$ 上に相異なる 3 点 A(2，4)，P(p，p^2)，Q(q，q^2) ($p<q$) をとる．直線 AP，AQ がともに円 C に接するとき，次の問に答えよ．

(1) p，q を求めよ．

(2) 直線 PQ が円 C に接することを示せ．

(1) 直線 AP の方程式は，

$$y-p^2=\frac{p^2-4}{p-2}(x-p)$$

であるから，

$$(p+2)x-y-2p=0.$$

したがって，直線 AP が C と接する条件は，

$$\frac{|-2-2p|}{\sqrt{(p+2)^2+1}}=1$$

であるから，

$$|-2-2p|=\sqrt{p^2+4p+5}.$$

両辺を 2 乗して，整理すると，

$$3p^2+4p-1=0. \qquad \cdots ①$$

直線 BP が C と接するから，同様にすると，

$$3q^2+4q-1=0. \qquad \cdots ②$$

①，②より，p，q は t の 2 次方程式

$$3t^2+4t-1=0 \qquad \cdots ③$$

の異なる 2 つの実数解であるから，$p<q$ より，

$$p=\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \quad q=\frac{-2+\sqrt{7}}{3}.$$

(2) 直線 PQ の方程式は，

$$y=(p+q)x-pq$$

であるから，③より，

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}.$$

これより，

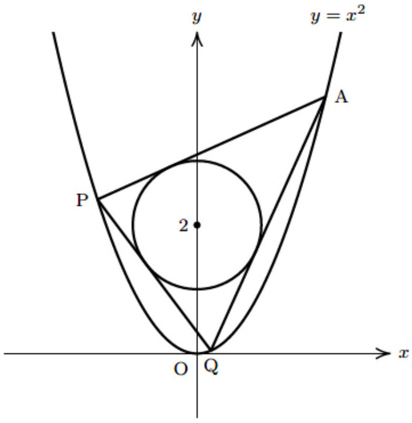
$$4x+3y-1=0.$$

ここで，C の中心 (0，2) と直線 PQ との距離を d とすると，

$$d=\frac{|4\cdot 0+3\cdot 2-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$=1$$

であるから，直線 PQ は円 C に接している．



演習問題

11-E-1

直線 $y = ax + a$ が 2 点 $(1,\ -1)$，$(2,\ 1)$ を両端とする線分と共有点をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

$$-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{3}$$

11-E-2

3 直線 $x - 2y + 9 = 0$，$3x + y - 1 = 0$，$ax - y + 5 = 0$ が三角形を作らないような定数 a の値をすべて求めよ．

$$a = \frac{1}{2},\quad -3,\quad 1$$

11-E-3

座標平面上に一辺の長さが 6 の正三角形 ABC がある．ただし，三角形 ABC の重心は原点の位置にあり，辺 BC は x 軸に平行である．また，頂点 A は y 軸上にあって y 座標は正であり，頂点 C の x 座標は正である．直線 $y=x$ に関して 3 点 A，B，C と対称な点を，それぞれ A$'$，B$'$，C$'$ とする．

(1)　C$'$ の座標を求めよ．

(2)　三角形 ABC と三角形 A$'$B$'$C$'$ が重なる部分の面積を求めよ．

(1) 辺 BC の中点を M とすると，三角形 ABC の重心 O は線分 AM を 2 : 1 に内分する．

さらに，y 軸上の点 A の y 座標が正であり，辺 BC が x 軸と平行であることから，M は y 軸上にあり，その y 座標は負である．

また，三角形 ABC は一辺の長さが 6 の正三角形であるから，

$$\mathrm{A}(0,\ 2\sqrt{3}),\quad \mathrm{M}(0,\ -\sqrt{3}).$$

さらに，CM $=3$ であり，C の x 座標が正であることより，

$$\mathrm{C}(3,\ -\sqrt{3}).$$

したがって，直線 $y=x$ に関して，C と対称な点 C$'$ の座標は，

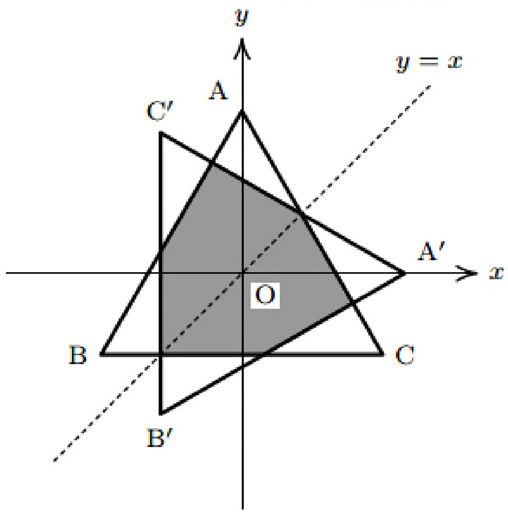
$$\mathrm{C}'(-\sqrt{3},\ 3).$$

(2) 辺 BC，B$'$C$'$ の交点を P，辺 AB，B$'$C$'$ の交点を Q とすると，

$$\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3}).$$

さらに，三角形 ABC と三角形 A$'$B$'$C$'$ が重なる部分からはみ出した 6 個の直角三角形はすべて合同であるから，求める面積は，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}-3\triangle\mathrm{BPQ}&=\frac{1}{2}\cdot 6^2\sin 60^\circ-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BP}\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{BP}\\&=9\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}+3)^2\\&=27-9\sqrt{3}.\end{aligned}$$



$\boxed{\textbf{11-E-4}}$

次の円の方程式を求めよ。

点$(1, -2)$を通り、x軸およびy軸に接する円

$$(x-1)^2+(y+1)^2=1 \text{ または } (x-5)^2+(y+5)^2=25$$

$\boxed{\textbf{11-E-5}}$

直線$y=-3x-4$から円$x^2+y^2-6x+10y+26=0$が切り取る線分の垂直二等分線の方程式を求めよ.

$$y=\frac{1}{3}x-6$$

11-E-6

xy 平面上の原点を O とし，半円 $x^2+y^2=9$, $y \geqq 0$ を C とする．半円 C の周上に 2 点 P, Q をとり，弦 PQ を軸として，弧 PQ を折り返し，点 R$(\sqrt{3},\ 0)$ で x 軸に接するようにする．

(1)　折り返した円弧を円周の一部にもつ円の方程式を求めよ．

(2)　3 点 P，O，Q を通る円の中心の座標および半径を求めよ．

(1)　半径 3 の円が点 R$(\sqrt{3},\ 0)$ で x 軸に上方から接するので，この円の中心の座標は，

$$(\sqrt{3},\ 3).$$

したがって，求める円の方程式は，

$$(x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2=9.$$

(2)　2 点 P，Q は (1) で求めた円と円 $x^2+y^2=9$ の交点であるから，

$$(x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2-9+k(x^2+y^2-9)=0 \qquad \cdots ①$$

は 2 点 P，Q を通る図形の方程式である．

①が点 O を通る条件は，

$$3+9-9-9k=0$$

であるから，

$$k=\frac{1}{3}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$(x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2-9+\frac{1}{3}(x^2+y^2-9)=0$$

であるから，

$$\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{27}{4}. \qquad \cdots ③$$

さらに，3 点を通る円はただ 1 つであるから，③が 3 点 P，O，Q を通る円である．

したがって，求める円の中心の座標は，

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},\ \frac{9}{4}\right)$$

であり，半径は $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である．