第１８章　空間ベクトル（数Ｂ，３講分）

Ａ問題

18-A-1　F297A

平行六面体 ABCD − EFGH において，次のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を用いて表せ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{FH}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

18-A-2　F299A

四面体 OABC に対して，点 P が，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

で定められているとする．ただし，s，t，u は実数とする．

このとき，点 P が三角形 ABC を含む平面上にある条件は，

$$s + t + u = 1$$

であることを示せ．

18-A-3　F305A

4 点 A(1，2，−1)，B(3，5，3)，C(5，0，1) を頂点とする平行四辺形 ABCD がある．頂点 D の座標を求めよ．

18-A-4　F306A

次の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を求めよ．

(1) $\vec{a} = (1,\ 1,\ 0)$，$\vec{b} = (1,\ 2,\ -2)$

(2) $\vec{a} = (1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ \sqrt{6},\ -1)$

(3) $\vec{a} = (-2,\ 3,\ 4)$，$\vec{b} = (5,\ 6,\ -2)$

18-A-5　F307A

3 点 A(−3，1，2)，B(−2，3，1)，C(−1，2，3) を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ．

18-A-6 F313A

2 点 $(1,\ 1,\ 3)$，$(2,\ 3,\ 1)$ を通る直線を l とする．l と xy 平面，yz 平面，zx 平面との交点の座標を求めよ．

18-A-7 F314A

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = (2,\ 1,\ 3)$ と $\overrightarrow{b} = (1,\ -1,\ 0)$ の両方に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めよ．

18-A-8 F309B

4 点 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 2)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{C}(5,\ 2,\ 5)$，$\mathrm{D}(-2,\ -1,\ x)$ が同一平面上にあるとき，実数 x の値を求めよ．

18-A-9 F315A

次の球面の方程式を求めよ．

(1) 2 点 $(3,\ 1,\ 2)$，$(5,\ 2,\ 4)$ を直径の両端とする球面．

(2) 中心の座標が $(3,\ 4,\ 2)$ であり，z 軸に接する球面．

(3) 点 $(2,\ -1,\ -5)$ を通り，xy，yz，zx 平面のいずれにも接する球面．

18-A-10 F316B

座標空間内に xy 平面と交わる半径 5 の球面 S がある．S と xy 平面の交わりが作る円の方程式が，

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0, \quad z = 0$$

であるとき，S の方程式を求めよ．

B問題

18-B-1 F300B

四面体 OABC において，辺 OB を 3 : 1 に内分する点を D，辺 OC を 1 : 2 に内分する点を E とし，三角形 ABC の重心を G とする．

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

(2) 3 点 A，D，E を通る平面と直線 OG の交点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

18-B-2 南山大

四面体 OABC において，辺 AB の中点を P，線分 PC の中点を Q とする。また，$0<m<1$ に対し，線分 OQ を $m:(1-m)$ に内分する点を R，直線 AR と平面 OBC の交点を S とする。ただし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と m で表せ。

(2) AR : RS を m で表せ。

(3) 辺 OA と線分 SQ が平行となるとき，m の値を求めよ。

18-B-3 F301B

四面体 OABC において，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1,\quad \mathrm{OB}=2,\quad \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=60^\circ,\quad \angle\mathrm{COA}=90^\circ$$

であり，3 点 A，B，C で定められる平面を π とする．頂点 O から π に下ろした垂線の足を H とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ．

18-B-4 F302B

一辺の長さが 1 である正四面体 OABC において，点 P が辺 OA 上を動き，点 Q が辺 BC 上を動くものとする．2 点 P，Q がそれぞれ動くとき，線分 PQ の中点 M の存在する範囲の面積を求めよ．

18-B-5 F308B

点 A(2, −1, 1) を通り，ベクトル $\vec{d} = (-1,\ 2,\ -3)$ に平行な直線を l とする．
このとき，点 B(6, 2, −3) から直線 l に引いた垂線の足 H の座標を求めよ．

18-B-6 F310B

座標空間に 4 点 A(2, 1, 0)，B(1, 0, 1)，C(0, 1, 2)，D(1, 3, 7) があり，3 点 A，B，C を通る平面を π とする．

(1) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(2) D から平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ．

18-B-7 F312B

座標空間において，2 つの球面

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 25,$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y - 4z + 5 = 0$$

が交わってできる円の中心の座標および半径を求めよ．

C 問題

18-C-1　F303C

四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を E，辺 OC を 3 : 1 に内分する点を F とする．辺 BC 上に点 P があり，線分 DP と EF が交点をもつとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

18-C-2　F304C

四面体 OABC において，$\mathrm{OA} = \mathrm{AB}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{OC}$，$\mathrm{OA} \perp \mathrm{BC}$ とするとき，次のことを証明せよ．

(1)　$\mathrm{OB} \perp \mathrm{AC}$

(2)　$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AC}^2$

18-C-3　F ﾁｬﾚ 38　2001 京都大学

xyz 空間内に正八面体の頂点 P_1，P_2，$\cdots$，P_6 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする．このとき，k と異なるすべての m に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ．

18-C-4 F311C

座標空間で

点 $(3,\ 4,\ 0)$ を通りベクトル $\overrightarrow{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l,

点 $(2,\ -1,\ 0)$ を通りベクトル $\overrightarrow{b}=(1,\ -2,\ 0)$ に平行な直線を m

とする．点 P は直線 l 上を，点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

18-C-5 F312C

2 点 $\mathrm{A}(5,\ 0,\ 9)$，$\mathrm{B}(1,\ 4,\ 3)$ と xy 平面上を動く点 P に対して，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ の最小値を求めよ．また，そのときの P の座標を求めよ．

18-C-6 F319C

空間内の定点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$ がある．xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円があり，点 P，Q はこの円周上を線分 PQ が直径となるように動く．

このとき，三角形 PAQ の面積の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{\textbf{18-C-7}}$　F320C

空間内の 4 点 A，B，C，D が

$$\mathrm{AB}=1,\quad \mathrm{AC}=2,\quad \mathrm{AD}=3,\quad \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\quad \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

を満たしている．この 4 点から等距離にある点を E とするとき，線分 AE の長さを求めよ．

$\boxed{\textbf{18-C-8}}$　F ﾁｬﾚ 40　2008 秋田大学

xyz 空間に点 $(0,\ 2,\ 2)$ を中心とする半径 1 の球面 S と，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 3)$ がある．S 上の点 P と点 A を通る直線が xy 平面と交わるとき，その交点を Q とする．P が S 上を動くとき，Q の存在する範囲を求め，xy 平面上に図示せよ．

演習問題

18-E-1 F298A

一辺の長さが 2 である正四面体 ABCD の辺 CD の中点を M とする.

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ が成り立つことを示せ.

(3) 正四面体 ABCD の体積を求めよ.

18-E-2

3 点 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 2,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 3)$ が定める平面に原点 O から垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

18-E-3

点 $A(1,\ 2,\ 4)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(-3,\ 1,\ 2)$ に垂直な平面を α とする。平面 α に関して同じ側に 2 点 $P(-2,\ 1,\ 7)$, $Q(1,\ 3,\ 7)$ がある。

(1) 平面 α に関して点 P と対称な点 R の座標を求めよ。

(2) 平面 α 上の点で，$PS+QS$ を最小にする点 S の座標とそのときの最小値を求めよ。

18-E-4

F318B

空間の 2 点 $A(-1,\ 5,\ -1)$, $B(2,\ -1,\ 2)$ を通る平面で，原点 O を中心とする球面 $S : x^2+y^2+z^2=1$ に接するものは 2 つある. これらの平面と球面 S との接点をそれぞれ T_1, T_2 とするとき，次の問に答えよ.

(1) 直線 AB と平面 OT_1T_2 の交点 H の座標を求めよ.

(2) 三角形 HT_1T_2 の面積を求めよ.

(3) 四面体 T_1T_2AB の体積を求めよ.