第２２章　二次曲線（数Ⅲ，２講分）

A問題

22-A-1　F393A

(1) 放物線 $y^2 = 8x$ の焦点の座標と準線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

(2) 頂点が原点であり，準線の方程式が $y = \dfrac{1}{2}$ である放物線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

22-A-2　F394A

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ の焦点の座標，および，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ．また，その概形をかけ．

(2) 中心が原点，長軸が y 軸上，短軸の長さが 4，点 $(\sqrt{3},\ 2)$ を通る楕円の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

22-A-3　F395A

(1) 双曲線 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ の焦点の座標，漸近線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

(2) 漸近線の方程式が $y = 2x$，$y = -2x$ で，点 $(\sqrt{2},\ 4)$ を通る双曲線の方程式を求めよ．また，その概形をかけ．

22-A-4 F401A

xy 平面において，直線 $y = x + k$ が楕円 $x^2 + 2y^2 = 1$ と異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲を求めよ．

22-A-5 F402A

次の接線の方程式を求めよ．

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 上の点 $(\sqrt{3},\ -\sqrt{2})$ における接線．

(2) 放物線 $y^2 = 4x$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線．

22-A-6 F403A

点 $(3,\ 4)$ から双曲線 $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ に引いた接線の方程式を求めよ．

B問題

22-B-1 F396B

次の点Pの軌跡を求めよ．

(1) 点 $(-2,\ 0)$ と直線 $x=2$ から等距離にある点P．

(2) 2点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ からの距離の和が10である点P．

(3) 2点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ からの距離の差が6である点P．

22-B-2 F5B

(1) 方程式 $x^2+4y^2+2x-8y+1=0$ で表される曲線の焦点の座標を求めよ．

(2) 漸近線の方程式が $y=x+3$，$y=-x+5$ であり，点 $(2,\ 2)$ を通る双曲線の方程式を求めよ．

22-B-3 F6B

直線 $x=2$ に接し，円 $(x+1)^2+y^2=1$ と外接する円の中心の軌跡を求めよ．

22-B-4 F404B

放物線 $C:\ y^2=4px\ (p>0)$ 上の頂点以外の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線を l とする．C の焦点をF，さらに点Pから準線に下ろした垂線をPHとする．l は $\angle\mathrm{HPF}$ を二等分することを示せ．

22-B-5 F405B

O を原点とする座標平面において，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 P における接線と 2 本の漸近線との交点を Q，R とする．

(1) P は線分 QR の中点であることを示せ．

(2) 三角形 OQR の面積は P の位置によらず一定であることを示せ．

22-B-6 F407B

楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 P から引いた 2 本の接線が直交するような P の軌跡を求めよ．

22-B-7 F413B

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接し，x 軸，y 軸に平行な辺をもつ長方形の面積の最大値を求めよ．

22-B-8 E

直線 $y=2x+1$ と楕円 $4x^2+y^2=4$ の 2 つの交点を A，B とする．

(1) 線分 AB の中点の座標を求めよ．

(2) 線分 AB の長さを求めよ．

22-B-9 E

放物線 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ と楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ の共通接線の方程式を求めよ．

C問題

22-C-1　F399C 改

双曲線C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上の点任意の点 P から，$C$ の 2 本の漸近線に下ろした推薦の足を，Q，R とする。このとき席 PQ・PR は一定であることを示し，その値を定数a, bの式で表せ。

22-C-2　F400C

楕円 C の中心を O，短軸の両端を A，B とし，長軸が直線 l 上にあるとする．C 上の A，B 以外の任意の点を P とし，直線 AP，BP と，l との交点をそれぞれ Q，R とする．

このとき，積 $\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ は一定であることを示せ．

22-C-3　F チャレ 50　大阪大学

直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す．

直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる．点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P$'$ で交わるとする．点 Q を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

を満たすようにとる．ただし，O は xy 平面の原点である．直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線になることを示せ．

22-C-4　F チャレ 52　2008 信州大学

曲線 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ 上の動点 P における接線と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とする．このとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ．

22-C-5　F24C

演習問題

22-E-1 E

長さ 9 の線分 AB の両端 A，B が，それぞれ x 軸上，y 軸上を動くとき，線分 AB を 1 : 2 に内分する点 P の軌跡を求めよ．

22-E-2 F406C

座標平面上に，双曲線 C : $x^2 - y^2 = 1$ と点 A(2，0) がある．点 A を通る直線 l が双曲線 C と相異なる 2 点で交わるとき，この 2 交点の中点 P は曲線 $(x-1)^2 - y^2 = 1$ 上にあることを証明せよ．

22-E-3 F チャレ 51　2007 筑波大学

xy 平面上で，2 次曲線 C : $x^2 + ay^2 + by = 0$ が直線 L : $y = 2x - 1$ に点 P で接している．ただし，$a \neq -\dfrac{1}{4}$，$b \neq 0$ とする．

(1) a と b の関係式を求めよ．

(2) C が楕円，放物線，双曲線となるそれぞれの場合に，b の値の範囲を求めよ．

(3) C が楕円になる場合の接点 P の存在範囲を求め，xy 平面上に図示せよ．