# 第３０章　積分計算Ｉ（数Ⅲ，３講分）

## Ａ問題

**30-A-1**　F553A

次の不定積分を求めよ

(1) $\displaystyle\int x^{\frac{5}{2}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x+2}{x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int (4\sin x - 3\cos x)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int (2e^x + 3^x)\,dx$

(1)　公式 $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\,dx + C$ を用いると，

$$(\text{与式}) = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C.$$

(2)　3 つに分ける．

$$(\text{与式}) = \int \left(x^2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C.$$

(3)　公式

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

を用いる．

$$(\text{与式}) = -4\cos x - 3\sin x + C.$$

(4)　$(3^x)' = 3^x\log 3$ であるから，

$$\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\log 3} + C.$$

したがって，

$$(\text{与式}) = 2e^x + \frac{3^x}{\log 3} + C.$$

**30-A-2** F554A

次の不定積分を求めよ

(1) $\displaystyle\int (2x-1)^4\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin 4x\,dx$

(3) $\displaystyle\int e^{\frac{x}{3}+1}\,dx$　　(4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(1) $2x-1=t$ とおくと，

$$2dx=dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int t^4\cdot\frac{1}{2}\,dt\\ &= \frac{1}{10}t^5+C\\ &= \frac{1}{10}(2x-1)^5+C.\end{aligned}$$

(2) $4x=t$ とおくと，

$$4dx=dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \sin t\cdot\frac{1}{4}\,dt\\ &= -\frac{1}{4}\cos t+C\\ &= -\frac{1}{4}\cos 4x+C.\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{x}{3}+1=t$ とおくと，

$$\frac{1}{3}dx=dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int e^t\cdot 3\,dt\\ &= 3e^t+C\\ &= 3e^{\frac{x}{3}+1}+C.\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと，

$$x+1=t^2$$

であるから，

$$dx=2t\,dt.$$

したがって，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,dt\\ &= 2\int (t^4-2t^2+1)\,dt\\ &= 2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right)+C\\ &= \frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5-\frac{4}{3}(\sqrt{x+1})^3+2\sqrt{x+1}+C.\end{aligned}$$

**30-A-3**　F555A

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$ を求めよ．

(1)　$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ であるから，

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2} \qquad \cdots ①$$

の両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けると，

$$x+5=a(x+2)+b(x-1). \qquad \cdots ②$$

ここで，

$$(\text{②の右辺})=(a+b)x+2a-b$$

であるから，①が $x$ に関する恒等式となる条件は，②の左辺と②の右辺の係数を比較すると，

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 2a-b=5. \end{cases}$$

これを解くと，

$$a=2,\quad b=-1.$$

(2)　(1) の結果より，

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=2\log|x-1|-\log|x+2|+C.$$

($C$ は積分定数)

**30-A-4** F561A

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(1) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int x(e^x)'\,dx \\
&= xe^x - \int (x)'e^x\,dx \\
&= xe^x - \int e^x\,dx \\
&= xe^x - e^x + C \\
&= (x-1)e^x + C.
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int x(-\cos x)'\,dx \\
&= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x)\,dx \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\
&= -x\cos x + \sin x + C.
\end{aligned}
$$

(3) $\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2(\log x)'\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{30-A-5}}$ F562A

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

(1) $\log x = t$ とおくと，

$$\frac{1}{x}\,dx = dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \log t\,dt \\ &= t\log t - t + C \\ &= \log x \log(\log x) - \log x + C.\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x} = t$ とおくと，

$$x = t^2$$

であるから，

$$dx = 2t\,dt.$$

したがって，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int e^t \cdot 2t\,dt \\ &= 2\left(te^t - \int e^t\,dt\right) \\ &= 2(t-1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{30-A-6}}$ F563A

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$

(1) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int x^2(-e^{-x})'\,dx \\
&= x^2(-e^{-x}) - \int (x^2)'(-e^{-x})\,dx \\
&= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx \\
&= -x^2e^{-x} + 2\int x(-e^{-x})'\,dx \\
&= -x^2e^{-x} + 2\left\{x(-e^{-x}) - \int (x)'(-e^{-x})\,dx\right\} \\
&= -x^2e^{-x} + 2\left\{-xe^{-x} - \int (-e^{-x})\,dx\right\} \\
&= -x^2e^{-x} - 2(xe^{-x} + e^{-x}) + C \\
&= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int x^2(-\cos x)'\,dx \\
&= x^2(-\cos x) - \int (x^2)'(-\cos x)\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2\int x(\sin x)'\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2\left\{\sin x - \int (x)'\sin x\,dx\right\} \\
&= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C \\
&= (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C.
\end{aligned}
$$

**30-A-7** F569A

次の定積分を求めよ

(1) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\log 2} e^{-x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x-4)}$

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 \\ &= \frac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 1) \\ &= \frac{2}{3}(27-1) \\ &= \frac{52}{3}.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \\ &= 0 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$ であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \Big[-e^{-x}\Big]_0^{\log 2} \\ &= -e^{-\log 2} - (-e^0) \\ &= -\frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(4) $$\frac{1}{x(x-4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_1^2 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\Big[\log|x-4| - \log|x|\Big]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-4}{x}\right|\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}(\log 1 - \log 3) \\ &= -\frac{1}{4}\log 3.\end{aligned}$$

**30-A-8** F570 A

定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x|\,dx$ を求めよ．

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ における $\sin x$ の符号を考えると，

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi \text{ のとき，} & \sin x \geqq 0, \\ \pi \leqq x \leqq 2\pi \text{ のとき，} & \sin x \leqq 0 \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,dx \\
&= \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} \\
&= -(-1) + 0 + 1 - (-1) \\
&= 3.
\end{aligned}$$

**30-A-9** F571A

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log x}$

(1) $x^3 = t$ とすると,

$$dt = 3x^2\,dx$$

であり,

| $x$ | $0$ | $\to$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $0$ | $\to$ | $1$ |

であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^1 e^t \cdot \frac{1}{3}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}e^t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(e-1).\end{aligned}$$

(2) $e^x + 1 = t$ とおくと,

$$dt = e^x\,dx$$

であり,

| $x$ | $0$ | $\to$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $2$ | $\to$ | $e+1$ |

であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_2^{e+1} \frac{1}{t}\,dt \\ &= \Big[\log t\Big]_2^{e+1} \\ &= \log(e+1) - \log 2 \\ &= \log\frac{e+1}{2}.\end{aligned}$$

(3) $\log x = t$ とおくと,

$$dt = \frac{1}{x}\,dx$$

であり,

| $x$ | $e$ | $\to$ | $e^2$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $\to$ | $2$ |

であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \\ &= \Big[\log t\Big]_1^2 \\ &= \log 2.\end{aligned}$$

**30-A-10** F577A

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos 3x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x^2}\,dx$

(1) 部分積分法を用いる.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x)'e^{2x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}e^2 - \left\{\frac{1}{4}(e^2-1)\right\}\\ &= \frac{1}{4}(e^2+1).\end{aligned}$$

(2) 部分積分法を用いる.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^\pi x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'\,dx\\ &= \left[\frac{1}{3}x\sin 3x\right]_0^\pi - \frac{1}{3}\int_0^\pi (x)'\sin 3x\,dx\\ &= -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^\pi\\ &= \frac{1}{9}\{(-1)-1\}\\ &= -\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

(3) 部分積分法を用いる.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_1^e \log x\left(-\frac{1}{x}\right)'\,dx\\ &= \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^e + \int_1^e (\log x)'\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= -\frac{1}{e} + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx\\ &= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e\\ &= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e}+1\right)\\ &= 1-\frac{2}{e}.\end{aligned}$$

## B問題

**30-B-1** F556B

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int 3(x^3+2)x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sin x\cos^4 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$

(1) $(x^3+2)'=3x^2$ であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int (x^3+2)(x^3+2)'\,dx\\ &= \frac{1}{2}(x^3+2)^2+C.\end{aligned}$$

(2) $(\cos x)'=-\sin x$ であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \cos^4 x(-\cos x)'\,dx\\ &= -\frac{1}{5}\cos^5 x+C.\end{aligned}$$

(3) $(x^2)'=2x$ であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int e^{x^2}(x^2)'\,dx\\ &= e^{x^2}+C.\end{aligned}$$

(4) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \log x(\log x)'\,dx\\ &= \frac{1}{2}(\log x)^2+C.\end{aligned}$$

**30-B-2** F557B

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(1) $\displaystyle\frac{3x^2}{x^3+1} = \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}$ であるから，

$$(\text{与式}) = \log|\,x^3+1\,| + C.$$

(2) $\displaystyle\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}}$ であるから，

$$(\text{与式}) = \log(e^x + e^{-x}) + C.$$

(3) $\displaystyle\tan x = -\frac{(\cos x)'}{\cos x}$ であるから，

$$(\text{与式}) = -\log|\,\cos x\,| + C.$$

**30-B-3** F558B

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$

(1) 半角公式を用いる.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

(2) $\cos x$ を 1 つだけ残す.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \cos x(\cos^2 x)^2\,dx\\ &= \int \cos x(1-\sin^2 x)^2\,dx\\ &= \int (\sin x)'(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\,dx\\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.\end{aligned}$$

(3) $(\text{分母})' = (\text{分子})$ の形を作る.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx\\ &= \int \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\,dx\\ &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx\\ &= \int \frac{1}{2}\left\{\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x} - \frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\right\}dx\\ &= \frac{1}{2}(\log|1+\sin x| - \log|1-\sin x|) + C\\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.\end{aligned}$$

(4) 積 → 和 公式を用いる.

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{2}\{\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x)\}\,dx\\ &= \int \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right) + C\\ &= \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.\end{aligned}$$

**30-B-4** F564B 改

定積分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\sin 4x\,dx$ を求めよ。

**解答** $I=\dfrac{4}{25}+\dfrac{4-3\sqrt{3}}{50}e^{-\frac{\pi}{2}}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\sin 4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\left(\frac{-\cos 4x}{4}\right)'dx=\left[-\frac{e^{-3x}\cos 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\cos 4x\,dx=-\frac{3}{4}J+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\cos 4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\left(\frac{\sin 4x}{4}\right)'dx=\left[\frac{e^{-3x}\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x}\sin 4x\,dx=\frac{3}{4}I+\frac{\sqrt{3}}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$I=-\dfrac{3}{4}J+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}$, $J=\dfrac{3}{4}I+\dfrac{\sqrt{3}}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}$ から $I=\dfrac{4}{25}+\dfrac{4-3\sqrt{3}}{50}e^{-\frac{\pi}{2}}$, $J=\dfrac{3}{25}+\dfrac{3+4\sqrt{3}}{50}e^{-\frac{\pi}{2}}$

**30-B-5** F572B

次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4}\,dx$

(1) $x = 3\sin\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$dx = 3\cos\theta\,d\theta$$

であり，

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9(1-\sin^2\theta)}\\ &= \sqrt{9\cos^2\theta}\\ &= 3|\cos\theta|.\end{aligned}$$

また，

| $x$ | $0$ | $\to$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $0$ | $\to$ | $\frac{\pi}{2}$ |

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|\cos\theta|\cdot 3\cos\theta\,d\theta\\ &= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta\\ &= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\ &= 9\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{9}{4}\pi.\end{aligned}$$

(2) $x = 2\tan\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$dx = \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

であり，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+4} &= \frac{1}{4\tan^2\theta+4}\\ &= \frac{1}{4(1+\tan^2\theta)}\\ &= \frac{\cos^2\theta}{4}.\end{aligned}$$

また，

| $x$ | $2$ | $\to$ | $2\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\to$ | $\frac{\pi}{3}$ |

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2\theta}{4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta\\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\,d\theta\\ &= \left[\frac{1}{2}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{24}.\end{aligned}$$

**30-B-6** F574B

$m$, $n$ を自然数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ を求めよ.

( i )　$m = n$ のとき,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \sin^2 mx \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2mx}{2} \, dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m} \sin 2mx \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

( ii )　$m \neq n$ のとき,

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\}$$

であるから,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\} \, dx \\ &= \left[ \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x - \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \right]_0^{\pi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

( i ), ( ii ) より,

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (m = n \text{ のとき}), \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}). \end{cases}$$

**30-B-7** F565B

$n$ は 0 以上の整数とし，$I_n = \int (\log x)^n\,dx$ とする．ただし，$(\log x)^0 = 1$ とする．

(1) $n \geqq 1$ のとき，等式 $I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) $I_2$，$I_3$ をそれぞれ求めよ．

(1) 部分積分法により，

$$\begin{aligned} I_n &= \int (x)'(\log x)^n\,dx \\ &= x(\log x)^n - \int x\{(\log x)^n\}'\,dx \\ &= x(\log x)^n - \int x \cdot n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1}\,dx \\ &= x(\log x)^n - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

(2) (1) より，

$$\begin{aligned} I_1 &= x\log x - \int 1\,dx \\ &= x\log x - x + C_1, \\ I_2 &= x(\log x)^2 - 2I_1 \\ &= x(\log x)^2 - 2(x\log x - x) + C_2 \\ &= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C_2, \\ I_3 &= x(\log x)^3 - 3I_2 \\ &= x(\log x)^3 - 3\{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\} + C_3 \\ &= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x\log x - 6x + C_3. \end{aligned}$$

(ただし，$C_1$，$C_2$，$C_3$ は積分定数とする)

**30-B-8** F566B

微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(x)-2f(x)=x+1$ を満たすとする．

(1) $g(x)=e^{-2x}f(x)$ のとき，$g'(x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) $f(0)=0$ を満たす $f(x)$ を求めよ．

(1) $g(x)=e^{-2x}f(x)$ の両辺を $x$ で微分すると，

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x) \\ &= e^{-2x}\{f'(x)-2f(x)\} \end{aligned}$$

であるから，条件 $f'(x)-2f(x)=x+1$ より，

$$g'(x)=(x+1)e^{-2x}.$$

(2) (1) の結果より，

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x)\,dx \\ &= \int (x+1)e^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C \\ &= -\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}+C. \end{aligned}$$

(ただし，$C$ は積分定数とする)

(3)

$$g(x)=e^{-2x}f(x) \qquad \cdots ①$$

において，$x=0$ とすると，

$$g(0)=f(0)$$

であるから，$f(0)=0$ より，

$$g(0)=0. \qquad \cdots ②$$

また，(2) の結果より，

$$g(0)=-\frac{3}{4}+C. \qquad \cdots ③$$

②，③より，

$$-\frac{3}{4}+C=0$$

であるから，

$$C=\frac{3}{4}.$$

したがって，

$$g(x)=-\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}+\frac{3}{4}. \qquad \cdots ④$$

さらに，①より，

$$f(x)=e^{2x}g(x)$$

であるから，④より，

$$f(x)=\frac{3}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}(2x+3).$$

**30-B-9** F575C

(1) 等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ が成り立つことを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ.

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx$ に対して,

$$\pi - x = t$$

とおくと,

$$-dx = dt$$

であり,

| $x$ | $0$ | $\to$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\pi$ | $\to$ | $0$ |

であるから,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - t) f\{\sin(\pi - t)\}(-dt) \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\,dt \\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\,dt \\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - I. \end{aligned}$$

したがって,

$$I = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx - I$$

であるから,

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

すなわち,

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

(2) (1) において,

$$f(x) = \frac{x}{3+x^2}$$

のときであるから,(1) より,

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx. \qquad \cdots (*)$$

ここで,$\cos x = t$ とおくと,

$$-\sin x\,dx = dt$$

であり,

| $x$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $\longrightarrow$ | $-1$ |

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx &= \int_1^{-1} \frac{1}{3+(1-t^2)}\,(-dt) \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4-t^2}\,dt \\ &= 2\int_0^{1} \frac{1}{(2+t)(2-t)}\,dt \\ &= 2\int_0^{1} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+t} + \frac{1}{2-t}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\log(2+t) - \log(2-t)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\log 3 \end{aligned}$$

であるから,(*) より,

$$(\text{与式}) = \frac{\pi}{4}\log 3.$$

**30-B-10** F581B

自然数 $n$ に対して，$I_n=\displaystyle\int_1^e (\log x)^n\,dx$ とする．

(1) $I_1$ の値を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$I_n$ を，$n$ と $I_{n-1}$ を用いて表せ．

(3) $I_4$ の値を求めよ．

(1) $I_n$ の定め方より，

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \log x\,dx \\ &= \Big[ x\log x - x \Big]_1^e \\ &= (e-e)-(0-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(2) 部分積分法を用いる．

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[ x(\log x)^n \Big]_1^e - \int_1^e xn(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx \\ &= e - n\int_1^e (\log x)^{n-1}\,dx \\ &= e - nI_{n-1}. \end{aligned}$$

(3) (2) の結果より，

$$\begin{aligned} I_4 &= e-4I_3 \\ &= e-4(e-3I_2) \\ &= -3e+12(e-2I_1) \\ &= 9e-24I_1 \end{aligned}$$

であるから，(1) の結果を用いると，

$$I_4 = 9e-24.$$

**30-B-11** F582B

0 以上の整数 $n$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ とする．ただし，$\sin^0 x = 1$ とする．

(1) $I_0$，$I_1$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 2 以上の整数 $n$ に対して，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $I_6$，$I_5$ の値をそれぞれ求めよ．

(1) $I_n$ の定め方より，

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \Big[\, x \,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \\ &= \Big[ -\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x(-\cos x)'\,dx \\ &= \Big[ -\sin^{n-1} x \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

であるから，

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

これより，

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

であるから，

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

(3) (2) より，

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{5}{6} I_4 \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} I_2 \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{5}{16} I_0 \end{aligned}$$

であるから，(1) の結果を用いると，

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{5}{32}\pi. \end{aligned}$$

また，(2) より，

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{4}{5} I_3 \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{8}{15} I_1 \end{aligned}$$

であるから，(1) の結果を用いると，

$$I_5 = \frac{8}{15}.$$

**30-B-12** F22B

0 以上の実数 $p$，$q$ に対して，$I(p,\ q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$ とする．

(1) 1 以上の実数 $q$ に対して，$I(p,\ q) = \dfrac{q}{p+1}I(p+1,\ q-1)$ が成り立つことを示せ．

(2) 自然数 $m$，$n$ に対して，$I(m,\ n) = \dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$ が成り立つことを示せ．

(1) 部分積分法を用いる．

$$I(p,\ q) = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1}x^{p+1}\{q(1-x)^{q-1}(-1)\}\,dx$$
$$= \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx$$
$$= \frac{q}{p+1}I(p+1,\ q-1).$$

(2) (1) を繰り返し用いると，,

$$I(m,\ n) = \frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$$
$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}I(m+2,\ n-2)$$
$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}I(m+3,\ n-3)$$
$$\cdots$$
$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdots\frac{1}{m+n}I(m+n,\ 0)$$
$$= \frac{m!n!}{(m+n)!}I(m+n,\ 0). \qquad \cdots ①$$

また，

$$I(m+n,\ 0) = \int_0^1 x^{m+n}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{m+n+1}. \qquad \cdots ②$$

①，②より，

$$I(m,\ n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

# C問題

**30-C-1** F560C

(1) 曲線 $C$ : $y=\sqrt{x^2+1}$ と直線 $y=-x+t$ $(t>0)$ との交点の座標を $t$ を用いて表せ.

(2) (1) の結果を用いて，不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ を求めよ.

(1) $C$ の方程式は $y>0$ の下で，

$$(y+x)(y-x)=1. \qquad \cdots ①$$

また，$y=-x+t$ より，

$$y+x=t. \qquad \cdots ②$$

$t\neq 0$ であるから，①，②より，

$$y-x=\frac{1}{t}. \qquad \cdots ③$$

②，③より，

$$x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\qquad y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

($t>0$ であるから，これは $y>0$ を満たす)

したがって，交点の座標は，

$$\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\ \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right).$$

(2) $x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$ のとき，(1) より，

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}&=-x+t\\&=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\\&=\frac{t^2+1}{2t}\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}dx&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\\&=\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt.\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}\,dx&=\int\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt\\&=\frac{1}{4}\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^3}\,dt\\&=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2\log|t|-\frac{1}{2t^2}\right)+C\\&=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(t-\frac{1}{t}\right)+2\log|t|\right\}+C\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\log|t|\right\}+C\\&=\frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\}+C.\end{aligned}$$

**30-C-2** F チャレ 70　東海大学

不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2}\,dx$ を求めよ.

$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \qquad \cdots ①$$

とし，両辺に $x(x-1)^2$ を掛けると，

$$2x+1 = a(x-1)^2 + bx(x-1) + cx. \qquad \cdots ②$$

ここで，

$$\begin{aligned}(②の右辺) &= a(x^2-2x+1) + b(x^2-x) + cx \\ &= (a+b)x^2 - (2a+b-c)x + a\end{aligned}$$

であるから，①が $x$ に関する恒等式となるための条件は，②の左辺と②の右辺の係数を比較すると，

$$\begin{cases} a+b=0, \\ -(2a+b-c)=2, \\ a=1. \end{cases}$$

これを解くと，

$$a=1, \quad b=-1, \quad c=3$$

であるから，①より，

$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2}\,dx &= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} \right\} dx \\ &= \log|x| - \log|x-1| - \frac{3}{x-1} + C \\ &= \log\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{3}{x-1} + C.\end{aligned}$$

($C$ は積分定数)

**30-C-3** F576C

定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx$ を求めよ.

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であるから,

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1} \quad \cdots ①$$

とし，両辺に $x^3+1$ を掛けると,

$$1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1). \quad \cdots ②$$

このとき,

$$(②の右辺)=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c$$

であるから，①が $x$ に関する恒等式になる条件は，②の左辺と②の右辺の係数を比較すると,

$$\begin{cases} a+b=0, \\ -a+b+c=0, \\ a+c=1. \end{cases}$$

これを解くと,

$$a=\frac{1}{3},\quad b=-\frac{1}{3},\quad c=\frac{2}{3}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3+1}&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)\\ &=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-x+1}\right).\end{aligned} \quad \cdots ③$$

ここで,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx&=\Big[\log(x+1)\Big]_0^1\\ &=\log 2\end{aligned} \quad \cdots ④$$

であり,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx&=\Big[\log(x^2-x+1)\Big]_0^1\\ &=0.\end{aligned} \quad \cdots ⑤$$

また,

$$I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$$

とすると,

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

であるから,

$$x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと,

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}\,d\theta$$

であり,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}&=\frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\\ &=\frac{4}{3(1+\tan^2\theta)}\\ &=\frac{4\cos^2\theta}{3}.\end{aligned}$$

さらに,

| $x$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $\longrightarrow$ | $\frac{\pi}{6}$ |

であるから,

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\cos^2\theta}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}\,d\theta\\ &=\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\\ &=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.\end{aligned} \quad \cdots ⑥$$

③, ④, ⑤, ⑥より,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx&=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx\\ &=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi.\end{aligned}$$

**30-C-4** F568C

$f(x)$ は $x>0$ で定義された微分可能な関数で，どのような $x>0$，$y>0$ に対しても，

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

を満たすものとする．

(1) $f(1)=0$ であることを示せ．

(2) $f(x)=-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ であることを示せ．

(3) 微分の定義に従って，$f'(x)$ を $f'(1)$ を用いて表せ．

(4) $f'(1)=2$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(1)
$$f(xy)=f(x)+f(y) \qquad \cdots ①$$
において，$x=y=1$ とすると，
$$f(1)=f(1)+f(1)$$
であるから，
$$f(1)=0. \qquad \cdots ②$$

(2) ①より，
$$\begin{aligned} f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)&=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)\\ &=f(1). \qquad \cdots ③\end{aligned}$$
②，③より，
$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$$
であるから，
$$f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right). \qquad \cdots ④$$

(3) 微分の定義と①，②，④より，
$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(1)}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}\\ &=\frac{f'(1)}{x}. \qquad \cdots ⑤\end{aligned}$$

(4) 条件 $f'(1)=2$ と⑤より，
$$f'(x)=\frac{2}{x}$$
であるから，
$$f(x)=2\log x+C.$$
($C$ は積分定数)

②より，
$$C=0$$
であるから，
$$f(x)=2\log x.$$

**30-C-5** Ｆチャレ 72

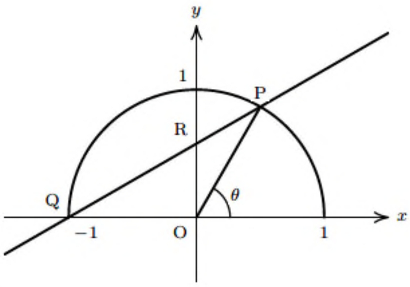
O，P，Q を，それぞれの座標が $(0,\ 0)$，$(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$(-1,\ 0)$ で与えられる平面上の点とする．また，$0 \leqq \theta < \pi$ として，点 P，Q を通る直線と，$y$ 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ t)$ とする．

(1) $\angle\mathrm{RQO}$ を $\theta$ を用いて表せ．また，$t$ を $\theta$ を用いて表せ．

(2) Q，R を通る直線の方程式を $t$ を用いて表せ．この直線と，O を中心とする半径 1 の円との交点を $t$ を用いて表せ．また，$\cos\theta$，$\sin\theta$ を $t$ を用いて表せ．

(3) $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ を示せ．

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\theta-\cos\theta}\,d\theta$ を求めよ．




(1) A(1, 0) とすると，円周角と中心角の関係より，

$$\angle\mathrm{RQO} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{POA} = \frac{\theta}{2}.$$

直線 RQ の傾きは $t$ であるから，

$$t = \tan\angle\mathrm{RQO} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

(2) 直線 QR は点 Q を通り，傾きが $t$ である直線であるから，直線 QR の方程式は，

$$y = t(x+1).$$

これと，円の方程式 $x^2+y^2=1$ を連立すると，

$$x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$$

であるから，

$$(t^2+1)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$$

$$(x+1)\{(t^2+1)x + t^2 - 1\} = 0.$$

$x \neq -1$ より，

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

であるから，

$$y = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

したがって，求める交点の座標は，

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right).$$

これは P の座標であるから，

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

(3) (1) より，

$$t = \tan\frac{\theta}{2}$$

であるから，

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}} = \frac{1}{\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1+\cos\theta = 1 + \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}.$$

(4) $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ のとき，

| $\theta$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\longrightarrow$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\longrightarrow$ | $1$ |

であるから，(2)，(3) より，

$$(\text{与式}) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \left[\log\frac{t}{t+1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$$

$$= \log\frac{1}{2} - \log\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \log\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

**30-C-6**

定積分$\displaystyle\int_0^{\pi}(x-a\sin x-b\sin 2x-c\sin 3x)^2dx$を最小にする定数$a$，$b$，$c$を求めよ。

**解答** (1) (i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$

$$=2\left[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$$

(ii) $m=n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2mx}{2}dx$$

— 9 —

$$=\left[x-\frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{\pi}=\pi$$

$m\neq n$ のとき

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\}$$

だから

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=2\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$$

$$=\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{\pi}=0$$

(2) 与式$\displaystyle=\int_{-\pi}^{\pi}\{x^2-2x(a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x)\}dx$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x)^2dx$$

(1)( i )の結果を用いると

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{x^2-2x(a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x)\}dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi^3-4a\pi+2b\pi-\frac{4}{3}c\pi$$

(1)( ii )の結果を用いると

$$\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x)^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(2ab\sin x\sin 2x+2bc\sin 2x\sin 3x$$

$$+2ca\sin 3x\sin x)dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}(a^2\sin^2x+b^2\sin^2 2x+c^2\sin^2 3x)dx$$

$$=a^2\pi+b^2\pi+c^2\pi$$

したがって

$$\text{与式}=\pi\left(a^2+b^2+c^2-4a+2b-\frac{4}{3}c\right)+\frac{2}{3}\pi^3$$

$$=\pi\left\{(a-2)^2+(b+1)^2+\left(c-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{49}{9}\right\}+\frac{2}{3}\pi^3$$

よって，与式は $a=2$，$b=-1$，$c=\dfrac{2}{3}$ のとき

最小値 $\dfrac{2}{3}\pi^3-\dfrac{49}{9}\pi$ をとる。

# 演習問題

**30-E-1** F580B

0 以上の整数 $n$ に対して，$I_n=\int_0^1 x^n e^{2x}\,dx$ とする．

(1) $I_0$ の値を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ のとき，$I_n$ を，$n$ と $I_{n-1}$ を用いて表せ．

(3) $I_4$ の値を求めよ．

(4) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x\cos x)e^{2\sin x}\,dx$ を求めよ．

(1) $I_n$ の定め方より，

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 e^{2x}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(e^2-1). \end{aligned}$$

(2) 部分積分法を用いる．

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{1}{2}x^n e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 nx^{n-1}e^{2x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}nI_{n-1}. \end{aligned}$$

(3) (2) の結果より，

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2}e^2 - 2I_3 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - 2\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2}I_2\right) \\ &= -\frac{1}{2}e^2 + 3\left(\frac{1}{2}e^2 - I_1\right) \\ &= e^2 - 3\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}I_0\right) \\ &= -\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}I_0 \end{aligned}$$

であるから，(1) の結果を用いると，

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}(e^2-1)\right\} \\ &= \frac{1}{4}(e^2-3). \end{aligned}$$

(4) $\sin x = t$ とおくと，

$$\cos x\,dx = dt$$

であり，

| $x$ | $0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ |
|---|---|
| $t$ | $0 \longrightarrow 1$ |

であるから，(3) の結果を用いると，

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_0^1 t^5 e^{2t}\,dt \\ &= I_5 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{2}I_4 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}(e^2-3) \\ &= \frac{1}{8}(15-e^2). \end{aligned}$$

**30-E-1**　F573B

$a$ を実数とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \{f(x) + f(-x)\}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} \{f(x) + f(a-x)\}\,dx$

(1) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \{f(x)+f(-x)\}\,dx \qquad \cdots ①$$

において，

$$(①の左辺) = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx. \qquad \cdots ②$$

また，

$$I = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

に対して，$x=-t$ とおくと，$dx=-dt$ であり，

| $x$ | $-a$ | $\to$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $a$ | $\to$ | $0$ |

であるから，

$$\begin{aligned} I &= \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) \\ &= \int_{0}^{a} f(-t)\,dt \\ &= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx. \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

②，③より，

$$\begin{aligned} (①の左辺) &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(-x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} \{f(x)+f(-x)\}\,dx \\ &= (①の右辺) \end{aligned}$$

であるから，①は成り立つ．

(2) $$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} \{f(x)+f(a-x)\}\,dx \qquad \cdots ①$$

において，

$$(①の右辺) = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(a-x)\,dx. \qquad \cdots ②$$

また，

$$I = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(a-x)\,dx$$

に対して，$a-x=t$ とおくと，$-dx=dt$ であり，

| $x$ | $0$ | $\to$ | $\frac{a}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $a$ | $\to$ | $\frac{a}{2}$ |

であるから，

$$\begin{aligned} I &= \int_{a}^{\frac{a}{2}} f(t)\,(-dt) \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(t)\,dt \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx. \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

②，③より，

$$\begin{aligned} (①の右辺) &= \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= (①の左辺) \end{aligned}$$

であるから，①は成り立つ．

**30-E-2**　F ﾁｬﾚ 73　2010 札幌医科大学

整数 $n$ に対して，$a_n$ を

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x)^n\,dx$$

と定める．

(1) $a_{-2}$，$a_{-1}$ をそれぞれ求めよ．

(2) $na_n=2^{-\frac{n}{2}}+(n-1)a_{n-2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $a_{2n}=b_n+\pi c_n$ (ただし，$b_n$，$c_n$ は有理数) と表されることを示せ．$n<0$ のときの $c_n$ を求めよ．必要ならば $\pi$ が無理数であることを用いてよい．

(1) $a_n$ の定め方より，

$$a_{-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1,$$

$$\begin{aligned}a_{-1}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin x)-\log(1-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\log(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

(2) $a_n$ の定め方より，

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-1}x\cos x\,dx\\&=\Big[\cos^{n-1}x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin^2 x)\,dx\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx\\&=2^{-\frac{n}{2}}+(n-1)(a_{n-2}-a_n)\end{aligned}$$

であるから，

$$na_n=2^{-\frac{n}{2}}+(n-1)a_{n-2}.$$

(3) (2) より，整数 $n$ に対して，

$$2na_{2n}=2^{-n}+(2n-1)a_{2n-2}\qquad\cdots①$$

が成り立つ．

すべての整数 $n$ に対して，

$$a_{2n}=b_n+\pi c_n\qquad\cdots(*)$$

を満たす有理数 $b_n$，$c_n$ が存在することを数学的帰納法を用いて示す．

(Ⅰ) $n=-1,\ 0,\ 1$ のとき，

$$a_{-2}=1,$$

$$a_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}a_2&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx\\&=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

であるから，$\pi$ は無理数より，

$b_{-2}=1$，$c_{-2}=0$，$b_0=0$，$c_0=\frac{1}{4}$，$b_2=\frac{1}{4}$，$c_2=\frac{1}{8}$

とすれば，$(*)$ を満たす有理数 $b_{-2}$，$c_{-2}$，$b_0$，$c_0$，$b_2$，$c_2$ が存在する．

(Ⅱ) $n=k,\ l$ ($k$ は負の整数，$l$ は正の整数) のとき，

$$a_{2k}=b_k+\pi c_k,$$
$$a_{2l}=b_l+\pi c_l$$

を満たす有理数 $b_k$，$c_k$，$b_l$，$c_l$ が存在すると仮定する．

このとき，①より，

$$2ka_{2k}=2^{-k}+(2k-1)a_{2k-2},\qquad\cdots②$$
$$(2l+2)a_{2l+2}=2^{-l-1}+(2l+1)a_{2l}\qquad\cdots③$$

が成り立つ．

②より，

$$\begin{aligned}a_{2k-2}&=-\frac{2^{-k}}{2k-1}+\frac{2k}{2k-1}a_{2k}\\&=-\frac{2^{-k}}{2k-1}+\frac{2k}{2k-1}(b_k+\pi c_k)\\&=\frac{-2^{-k}+2kb_k}{2k-1}+\pi\left(\frac{2k}{2k-1}c_k\right)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{cases}b_{k-1}=\dfrac{-2^{-k}+2kb_k}{2k-1},\\[2mm] c_{k-1}=\dfrac{2k}{2k-1}c_k\end{cases}$$

とすれば，$n=k-1$ のときも $(*)$ を満たす有理数 $b_{k-1}$，$c_{k-1}$ が存在する．

また，③より，

$$\begin{aligned}a_{2l+2}&=\frac{2^{-l-1}}{2l+2}+\frac{2l+1}{2l+2}a_{2l}\\&=\frac{2^{-l-1}}{2l+2}+\frac{2l+1}{2l+2}(b_l+\pi c_l)\\&=\frac{2^{-l-1}+(2l+1)b_l}{2l+2}+\pi\left(\frac{2l+1}{2l+2}c_l\right)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{cases}b_{l+1}=\dfrac{2^{-l-1}+(2l+1)b_l}{2l+2},\\[2mm] c_{l+1}=\dfrac{2l+1}{2l+2}c_l\end{cases}$$

とすれば，$n=l+1$ のときも $(*)$ を満たす有理数 $b_{l+1}$，$c_{l+1}$ が存在する．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，すべての整数 $n$ に対して，$(*)$ を満たす有理数 $b_n$，$c_n$ が存在する．

さらに，$n<0$ のとき，

$$c_{n-1}=\frac{2n}{2n-1}c_n$$

であり，$c_{-2}=0$ であるから，すべての負の整数 $n$ に対して，

$$c_n=0.$$

**コメント**

**30-E-3** Ｆチャレ７１　2003 筑波大学

実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が，次の 2 つの条件 (A)，(B) を満たしている．

(A)　すべての $x$ について，$f(x) > 0$ である．

(B)　すべての $x$，$y$ について，$f(x+y) = f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ．

(1)　$f(0) = 1$ を示せ．

(2)　$g(x) = \log f(x)$ とするとき，$g'(x) = f'(0) - x$ が成り立つことを示せ．

(3)　$f'(0) = 2$ となるような $f(x)$ を求めよ．

(1)　条件 (B) において，$x = y = 0$ とすると，

$$f(0) = \{f(0)\}^2$$

であるから，条件 (A) より，

$$f(0) = 1. \qquad \cdots ①$$

(2)

$$g(x) = \log f(x) \qquad \cdots ②$$

において，$x = 0$ とすると，

$$g(0) = \log f(0)$$

であるから，①より，

$$g(0) = 0. \qquad \cdots ③$$

また，②の両辺を $x$ で微分すると，

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

であるから，$x = 0$ のとき，

$$g'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)}.$$

①より，

$$g'(0) = f'(0). \qquad \cdots ④$$

ここで，微分の定義と②より，

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log f(x+h) - \log f(x)}{h}.$$

さらに，条件 (B) を用いると，

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log\{f(x)f(h)e^{-hx}\} - \log f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log f(x) + \log f(h) - hx - \log f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{\log f(h)}{h} - x\right\}$$

であるから，②，③より，

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(h) - g(0)}{h} - x\right\} = g'(0) - x.$$

これと④より，

$$g'(x) = f'(0) - x.$$

(3)　(2) の結果と条件 $f'(0) = 2$ より，

$$g'(x) = 2 - x$$

であるから，

$$g(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + C. \qquad \cdots ⑥$$

(ただし，$C$ は積分定数)

また，③，⑥より，

$$C = 0. \qquad \cdots ⑦$$

さらに，②より，

$$f(x) = e^{g(x)}$$

であるから，⑥，⑦より，

$$f(x) = e^{2x - \frac{1}{2}x^2}.$$

**30-E-4**

$x+\sqrt{x^2+1}=t$ と置き換えることにより，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ．

$$\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

**30-E-5**

$n$ は自然数とする.

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\sqrt{x}>\log(x+1)$ が成り立つことを示し，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)$$

を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1(1-\sqrt{x})^n\,dx$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1(1-\sqrt{x})^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(1) $f(x)=\sqrt{x}-\log(x+1)$ とすると，$x>0$ において，

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x+1}\\&=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2(x+1)\sqrt{x}}\geqq 0\end{aligned}$$

であり，

$$f(0)=0$$

であるから，$x>0$ において，

$$f(x)>0.$$

したがって，

$$\sqrt{x}>\log(x+1).$$

これより，$x>0$ のとき，

$$0<\frac{\log(x+1)}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

であるから，

$$0<\frac{\log(n+1)}{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

さらに，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0.$$

(2) $1-\sqrt{x}=t$ とおくと，

$$x=(1-t)^2$$

であるから，

$$dx=(2t-2)\,dt.$$

さらに，

| $x$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $\longrightarrow$ | $0$ |

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-\sqrt{x})^n\,dx&=\int_1^0 t^n(2t-2)\,dt\\&=\left[\frac{2}{n+2}t^{n+2}-\frac{2}{n+1}t^{n+1}\right]_1^0\\&=\frac{2}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果より，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\log\left\{\int_0^1(1-\sqrt{x})^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{2}{(n+1)(n+2)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log 2-\log(n+1)-\log(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log 2-2\log(n+1)-\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&=0\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1(1-\sqrt{x})^n\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}=1.$$