

## 第 29 章 微分の応用 2 (数 III, 2 講分)

### A 問題

#### 29-A-1 F545A

数直線上を運動する点 P の座標  $x$  が, 時刻  $t$  を用いて  $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 1$  で表されるとする.

- (1)  $t = 2$  における P の速度, 加速度をそれぞれ求めよ.
- (2) P の運動の向きが変わる時刻を求めよ.

#### 29-A-2 F546A

平面上を運動する点 P( $x, y$ ) が, 時刻  $t$  を用いて  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$  で表される時, P の速度ベクトル  $\vec{v}$  と速さ  $|\vec{v}|$  を求めよ.

#### 29-A-3 F547A

$|x|$  が十分小さいとき, 次の関数の近似式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

を用いて,  $x$  の 2 次式として作れ.

- (1)  $e^x$
- (2)  $\cos x$
- (3)  $\log(1+x)$

#### 29-A-4 F548B

$x > 0$  のとき, 不等式  $e^x > 1 + x$  が成り立つことを示せ.

**B問題****29-B-1** F549B 改

- (1)  $x > 0$  のとき,  $\sin x$  と  $x - \frac{x^3}{6}$  の大小を比較せよ。
- (2)  $x > 0$  のとき,  $\cos x$  と  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$  の大小を比較せよ。

**29-B-2** F5B

すべての正の実数  $x$  に対して  $x^{\sqrt{a}} \leq a^{\sqrt{x}}$  を満たす正の実数  $a$  の値を求めよ。

**C問題****29-C-1** Fチャレ69 2009九州大学

曲線  $y = e^x$  上を動く点 P の時刻  $t$  における座標を  $(x(t), y(t))$  と表し、速度ベクトルを  $\vec{v}$ 、加速度ベクトルを  $\vec{\alpha}$  とする。すべての時刻  $t$  で  $|\vec{v}| = 1$  かつ  $\frac{dx}{dt} > 0$  であるとする。

- (1) P が点  $(s, e^s)$  を通過する時刻における速度ベクトル  $\vec{v}$  を  $s$  を用いて表せ。
- (2) P が点  $(s, e^s)$  を通過する時刻における加速度ベクトル  $\vec{\alpha}$  を  $s$  を用いて表せ。
- (3) P が曲線全体を動くとき、 $|\vec{\alpha}|$  の最大値を求めよ。

**29-C-2** F551C

$x > 0$  のとき、すべての自然数  $n$  に対して、

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} > \left(1 - \frac{x^n}{n!}\right) e^x$$

が成り立つことを証明せよ。

**29-C-3** F552C(1)  $x > 0$  のとき, 不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

が成り立つことを示せ.

(2) 2 以上の自然数  $n$  に対して,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

とすると,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ.**29-C-4** E $0 < a < b$  のとき, 不等式

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

が成り立つことを示せ. ただし, 対数は自然対数とする.

**29-C-5** F24C $x \geq 1$  のとき,  $x \log x \geq (x-1) \log(x+1)$  を示せ.

**29-C-6** F23C

$b \geq a > 0$  とする。不等式  $\log b - \log a \geq \frac{2(b-a)}{b+a}$  を証明せよ。

**29-C-7** F24C

$0 < a < b$  とする。不等式

$$-(a+1)e^{-a} < \frac{(b+2)e^{-b} - (a+2)e^{-a}}{b-a} < -(b+1)e^{-b}$$

を証明せよ。

**29-C-8** F23C

$a, b, c$  は正の実数,  $c > 1$  とする。不等式  $(a+b)^c \leq 2^{c-1}(a^c + b^c)$  を証明せよ。

**29-C-9** F24C

$a$  と  $b$  を正の数とする。  $\sqrt{a^a b^b}$  と  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}$  の大小を比較せよ。

**29-C-10** F23C

$a, b$  を正の数とする。不等式  $a \log(1+a) + e^b > 1 + ab + b$  を証明せよ。

**演習問題**

**29-E-1**

**29-E-2**

**29-E-3**

**29-E-4**

**29-E-5**