

第 29 章 微分の応用 2 (数 III, 2 講分)

A 問題

29-A-1 F545A

数直線上を運動する点 P の座標 x が, 時刻 t を用いて $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 1$ で表されるとする.

- (1) $t = 2$ における P の速度, 加速度をそれぞれ求めよ.
- (2) P の運動の向きが変わる時刻を求めよ.

29-A-2 F546A

平面上を運動する点 P(x, y) が, 時刻 t を用いて $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ で表されるとき, P の速度ベクトル \vec{v} と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ.

29-A-3 F547A

$|x|$ が十分小さいとき, 次の関数の近似式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$$

を用いて, x の 2 次式として作れ.

- (1) e^x
- (2) $\cos x$
- (3) $\log(1+x)$

29-A-4 F548B

$x > 0$ のとき, 不等式 $e^x > 1 + x$ が成り立つことを示せ.

B問題**29-B-1** F549B 改

(1) $x > 0$ のとき, $\sin x$ と $x - \frac{x^3}{6}$ の大小を比較せよ。

(2) $x > 0$ のとき, $\cos x$ と $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ の大小を比較せよ。

29-B-2 F5B

すべての正の実数 x に対して $x^{\sqrt{a}} \leq a^{\sqrt{x}}$ を満たす正の実数 a の値を求めよ。

C問題**29-C-1** Fチャレ69 2009九州大学

曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ と表し、速度ベクトルを \vec{v} 、加速度ベクトルを $\vec{\alpha}$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}| = 1$ かつ $\frac{dx}{dt} > 0$ であるとする。

- (1) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における速度ベクトル \vec{v} を s を用いて表せ。
- (2) P が点 (s, e^s) を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。
- (3) P が曲線全体を動くとき、 $|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。

29-C-2 F551C

$x > 0$ のとき、すべての自然数 n に対して、

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} > \left(1 - \frac{x^n}{n!}\right) e^x$$

が成り立つことを証明せよ。

29-C-3 F552C(1) $x > 0$ のとき, 不等式

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

が成り立つことを示せ.

(2) 2 以上の自然数 n に対して,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)$$

とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.**29-C-4** E $0 < a < b$ のとき, 不等式

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

が成り立つことを示せ. ただし, 対数は自然対数とする.

29-C-5 F24C $x \geq 1$ のとき, $x \log x \geq (x-1) \log(x+1)$ を示せ.

29-C-6 F23C

$b \geq a > 0$ とする。不等式 $\log b - \log a \geq \frac{2(b-a)}{b+a}$ を証明せよ。

29-C-7 F24C

$0 < a < b$ とする。不等式

$$-(a+1)e^{-a} < \frac{(b+2)e^{-b} - (a+2)e^{-a}}{b-a} < -(b+1)e^{-b}$$

を証明せよ。

29-C-8 F23C

a, b, c は正の実数, $c > 1$ とする。不等式 $(a+b)^c \leq 2^{c-1}(a^c + b^c)$ を証明せよ。

29-C-9 F24C

a と b を正の数とする。 $\sqrt{a^a b^b}$ と $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{a+b}{2}}$ の大小を比較せよ。

29-C-10 F23C

a, b を正の数とする。不等式 $a \log(1+a) + e^b > 1 + ab + b$ を証明せよ。

演習問題

29-E-1

29-E-2

29-E-3

29-E-4

29-E-5