第３０章　積分計算 I （数Ⅲ，３講分）

A問題

30-A-1　F553A

次の不定積分を求めよ

(1) $\displaystyle\int x^{\frac{5}{2}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x+2}{x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int (4\sin x - 3\cos x)\,dx$　　(4) $\displaystyle\int (2e^x + 3^x)\,dx$

(1) 公式 $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\,dx + C$ を用いると，

$$(\text{与式}) = \frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} + C$$
$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C.$$

(2) 3 つに分ける．

$$(\text{与式}) = \int \left(x^2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C.$$

(3) 公式

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

を用いる．

$$(\text{与式}) = -4\cos x - 3\sin x + C.$$

(4) $(3^x)' = 3^x\log 3$ であるから，

$$\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\log 3} + C.$$

したがって，

$$(\text{与式}) = 2e^x + \frac{3^x}{\log 3} + C.$$

30-A-2 F554A

次の不定積分を求めよ

(1) $\displaystyle\int (2x-1)^4\,dx$ (2) $\displaystyle\int \sin 4x\,dx$

(3) $\displaystyle\int e^{\frac{x}{3}+1}\,dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$

(1) $2x-1=t$ とおくと，

$$2dx=dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int t^4\cdot\frac{1}{2}\,dt\\ &= \frac{1}{10}t^5+C\\ &= \frac{1}{10}(2x-1)^5+C.\end{aligned}$$

(2) $4x=t$ とおくと，

$$4dx=dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \sin t\cdot\frac{1}{4}\,dt\\ &= -\frac{1}{4}\cos t+C\\ &= -\frac{1}{4}\cos 4x+C.\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{x}{3}+1=t$ とおくと，

$$\frac{1}{3}\,dx=dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int e^t\cdot 3\,dt\\ &= 3e^t+C\\ &= 3e^{\frac{x}{3}+1}+C.\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと，

$$x+1=t^2$$

であるから，

$$dx=2t\,dt.$$

したがって，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{(t^2-1)^2}{t}\cdot 2t\,dt\\ &= 2\int (t^4-2t^2+1)\,dt\\ &= 2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right)+C\\ &= \frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5-\frac{4}{3}(\sqrt{x+1})^3+2\sqrt{x+1}+C.\end{aligned}$$

30-A-3 F555A

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$ を求めよ．

(1) $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ であるから，

$$\frac{x+5}{x^2+x-2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2} \qquad \cdots ①$$

の両辺に $(x-1)(x+2)$ を掛けると，

$$x+5=a(x+2)+b(x-1). \qquad \cdots ②$$

ここで，

$$(②\text{の右辺})=(a+b)x+2a-b$$

であるから，①が x に関する恒等式となる条件は，②の左辺と②の右辺の係数を比較すると，

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 2a-b=5. \end{cases}$$

これを解くと，

$$a=2, \quad b=-1.$$

(2) (1) の結果より，

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=2\log|x-1|-\log|x+2|+C.$$

(C は積分定数)

$\boxed{\textbf{30-A-4}}$ F561A

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(1) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int x(e^x)'\,dx \\
&= xe^x - \int (x)'e^x\,dx \\
&= xe^x - \int e^x\,dx \\
&= xe^x - e^x + C \\
&= (x-1)e^x + C.
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int x(-\cos x)'\,dx \\
&= x(-\cos x) - \int (x)'(-\cos x)\,dx \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\
&= -x\cos x + \sin x + C.
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2(\log x)'\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C.
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{30-A-5}}$ F562A

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

(1) $\log x = t$ とおくと，

$$\frac{1}{x}\,dx = dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \log t\,dt \\ &= t\log t - t + C \\ &= \log x \log(\log x) - \log x + C.\end{aligned}$$

(2) $\sqrt{x} = t$ とおくと，

$$x = t^2$$

であるから，

$$dx = 2t\,dt.$$

したがって，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int e^t \cdot 2t\,dt \\ &= 2\left(te^t - \int e^t\,dt\right) \\ &= 2(t-1)e^t + C \\ &= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.\end{aligned}$$

30-A-6 F563A

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$

(1) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(与式) &= \int x^2(-e^{-x})'\,dx \\
&= x^2(-e^{-x}) - \int (x^2)'(-e^{-x})\,dx \\
&= -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx \\
&= -x^2e^{-x} + 2\int x(-e^{-x})'\,dx \\
&= -x^2e^{-x} + 2\left\{x(-e^{-x}) - \int (x)'(-e^{-x})\,dx\right\} \\
&= -x^2e^{-x} + 2\left\{-xe^{-x} - \int (-e^{-x})\,dx\right\} \\
&= -x^2e^{-x} - 2(xe^{-x} + e^{-x}) + C \\
&= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(与式) &= \int x^2(-\cos x)'\,dx \\
&= x^2(-\cos x) - \int (x^2)'(-\cos x)\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2\int x(\sin x)'\,dx \\
&= -x^2\cos x + 2\left\{\sin x - \int (x)'\sin x\,dx\right\} \\
&= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C \\
&= (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x + C.
\end{aligned}
$$

30-A-7 F569A

次の定積分を求めよ

(1) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\log 2} e^{-x}\,dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x-4)}$

(1) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ であるから，

$$\begin{aligned}(与式) &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 \\ &= \frac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 1) \\ &= \frac{2}{3}(27 - 1) \\ &= \frac{52}{3}.\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ であるから，

$$\begin{aligned}(与式) &= \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \\ &= 0 - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$ であるから，

$$\begin{aligned}(与式) &= \Big[-e^{-x}\Big]_0^{\log 2} \\ &= -e^{-\log 2} - (-e^0) \\ &= -\frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(4) $$\frac{1}{x(x-4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right)$$

であるから，

$$\begin{aligned}(与式) &= \int_1^2 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x}\right)dx \\ &= \frac{1}{4}\Big[\log|x-4| - \log|x|\Big]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\log\left|\frac{x-4}{x}\right|\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4}(\log 1 - \log 3) \\ &= -\frac{1}{4}\log 3.\end{aligned}$$

30-A-8 F570 A

定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x|\,dx$ を求めよ.

$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ における $\sin x$ の符号を考えると,

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi \text{ のとき,} & \sin x \geqq 0, \\ \pi \leqq x \leqq 2\pi \text{ のとき,} & \sin x \leqq 0 \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,dx \\
&= \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \Big[\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} \\
&= -(-1) + 0 + 1 - (-1) \\
&= 3.
\end{aligned}$$

30-A-9 F571A

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log x}$

(1) $x^3 = t$ とすると,

$$dt = 3x^2\,dx$$

であり,

x	0	$\to$	1
t	0	$\to$	1

であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^1 e^t \cdot \frac{1}{3}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}e^t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(e-1).\end{aligned}$$

(2) $e^x + 1 = t$ とおくと,

$$dt = e^x\,dx$$

であり,

x	0	$\to$	1
t	2	$\to$	$e+1$

であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_2^{e+1} \frac{1}{t}\,dt \\ &= \left[\log t\right]_2^{e+1} \\ &= \log(e+1) - \log 2 \\ &= \log\frac{e+1}{2}.\end{aligned}$$

(3) $\log x = t$ とおくと,

$$dt = \frac{1}{x}\,dx$$

であり,

x	e	$\to$	e^2
t	1	$\to$	2

であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \\ &= \left[\log t\right]_1^2 \\ &= \log 2.\end{aligned}$$

30-A-10 F577A

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos 3x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x^2}\,dx$

(1) 部分積分法を用いる.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x)'e^{2x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}e^2 - \left\{\frac{1}{4}(e^2-1)\right\} \\
&= \frac{1}{4}(e^2+1).
\end{aligned}
$$

(2) 部分積分法を用いる.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^\pi x\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)'\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x\sin 3x\right]_0^\pi - \frac{1}{3}\int_0^\pi (x)'\sin 3x\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{9}\{(-1)-1\} \\
&= -\frac{2}{9}.
\end{aligned}
$$

(3) 部分積分法を用いる.

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_1^e \log x\left(-\frac{1}{x}\right)'\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^e + \int_1^e (\log x)'\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= -\frac{1}{e} + \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e \\
&= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e}+1\right) \\
&= 1 - \frac{2}{e}.
\end{aligned}
$$