

第30章 積分計算 I (数III, 3講分)

A問題

30-A-1 F553A

次の不定積分を求めよ

(1) $\int x^{\frac{5}{2}} dx$

(2) $\int \frac{x^4 - 3x + 2}{x^2} dx$

(3) $\int (4 \sin x - 3 \cos x) dx$

(4) $\int (2e^x + 3^x) dx$

30-A-2 F554A

次の不定積分を求めよ

(1) $\int (2x - 1)^4 dx$

(2) $\int \sin 4x dx$

(3) $\int e^{\frac{x}{3}+1} dx$

(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$

30-A-3 F555A

不定積分 $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$ を求めよ.

30-A-4 F561A

次の不定積分を求めよ.

(1) $\int xe^x dx$

(2) $\int x \sin x dx$

(3) $\int x \log x dx$

30-A-5 F562A

次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{\log(\log x)}{x} dx$

(2) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

30-A-6 F563A

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^2 e^{-x} dx$

(2) $\int x^2 \sin x dx$

30-A-7 F569A

次の定積分を求めよ

(1) $\int_1^9 \sqrt{x} dx$ (2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \cos x dx$

(3) $\int_0^{\log 2} e^{-x} dx$ (4) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x-4)}$

30-A-8 F570 A定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |\sin x| dx$ を求めよ。**30-A-9** F571A

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$

(2) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

(3) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \log x}$

30-A-10 F572A

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x e^{2x} dx$

(2) $\int_0^{\pi} x \cos 3x dx$

(3) $\int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx$

B問題**30-B-1** F556B

次の不定積分を求めよ.

(1) $\int 3(x^3 + 2)x^2 dx$

(2) $\int \sin x \cos^4 x dx$

(3) $\int 2xe^{x^2} dx$

(4) $\int \frac{\log x}{x} dx$

30-B-2 F557B

次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$

(2) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

(3) $\int \tan x dx$

30-B-3 F558B

次の不定積分を求めよ.

(1) $\int \sin^2 x dx$

(2) $\int \cos^5 x dx$

(3) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

(4) $\int \sin 2x \cos 3x dx$

30-B-4 F564B 会

定積分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-3x} \sin 4x dx$ を求めよ。

30-B-5 F572B

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$

(2) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+4} dx$

30-B-6 F574B

m, n を自然数とするととき、定積分 $\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx$ を求めよ。

30-B-7 F565B

n は 0 以上の整数とし、 $I_n = \int (\log x)^n dx$ とする。ただし、 $(\log x)^0 = 1$ とする。

(1) $n \geq 1$ のとき、等式 $I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(2) I_2, I_3 をそれぞれ求めよ。

30-B-8 F566B

微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(x) - 2f(x) = x + 1$ を満たすとする.

- (1) $g(x) = e^{-2x}f(x)$ のとき, $g'(x)$ を求めよ.
- (2) $g(x)$ を求めよ.
- (3) $f(0) = 0$ を満たす $f(x)$ を求めよ.

30-B-9 F575C

- (1) 等式 $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ が成り立つことを示せ.
- (2) 定積分 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{3 + \sin^2 x} dx$ を求めよ.

30-B-10 F581B

自然数 n に対して, $I_n = \int_1^e (\log x)^n dx$ とする.

- (1) I_1 の値を求めよ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, I_n を, n と I_{n-1} を用いて表せ.
- (3) I_4 の値を求めよ.

30-B-11 F582B

0 以上の整数 n に対して, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ とする. ただし, $\sin^0 x = 1$ とする.

- (1) I_0, I_1 の値をそれぞれ求めよ.
- (2) 2 以上の整数 n に対して, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つことを示せ.
- (3) I_6, I_5 の値をそれぞれ求めよ.

30-B-12 F22B

0 以上の実数 p, q に対して, $I(p, q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ とする.

- (1) 1 以上の実数 q に対して, $I(p, q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$ が成り立つことを示せ.
- (2) 自然数 m, n に対して, $I(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ が成り立つことを示せ.

C問題**30-C-1** F560C

(1) 曲線 $C : y = \sqrt{x^2 + 1}$ と直線 $y = -x + t$ ($t > 0$) との交点の座標を t を用いて表せ.

(2) (1) の結果を用いて, 不定積分 $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$ を求めよ.

30-C-2 F チャレ 70 東海大学

不定積分 $\int \frac{2x + 1}{x(x - 1)^2} dx$ を求めよ.

30-C-3 F576C

定積分 $\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$ を求めよ.

30-C-4 F568C

$f(x)$ は $x > 0$ で定義された微分可能な関数で, どのような $x > 0, y > 0$ に対しても,

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

を満たすものとする.

- (1) $f(1) = 0$ であることを示せ.
- (2) $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$ であることを示せ.
- (3) 微分の定義に従って, $f'(x)$ を $f'(1)$ を用いて表せ.
- (4) $f'(1) = 2$ のとき, $f(x)$ を求めよ.

30-C-5 F チャレ 72

O, P, Q を, それぞれの座標が $(0, 0)$, $(\cos \theta, \sin \theta)$, $(-1, 0)$ で与えられる平面上の点とする.

また, $0 \leq \theta < \pi$ として, 点 P, Q を通る直線と, y 軸との交点を $R(0, t)$ とする.

- (1) $\angle RQO$ を θ を用いて表せ. また, t を θ を用いて表せ.
- (2) Q, R を通る直線の方程式を t を用いて表せ. この直線と, O を中心とする半径 1 の円との交点を t を用いて表せ. また, $\cos \theta$, $\sin \theta$ を t を用いて表せ.
- (3) $\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ を示せ.
- (4) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin \theta - \cos \theta} d\theta$ を求めよ.

30-C-6

定積分 $\int_0^{\pi} (x - a \sin x - b \sin 2x - c \sin 3x)^2 dx$ を最小にする定数 a, b, c を求めよ.

演習問題**30-E-1** F580B

0 以上の整数 n に対して, $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$ とする.

- (1) I_0 の値を求めよ.
- (2) $n \geq 1$ のとき, I_n を, n と I_{n-1} を用いて表せ.
- (3) I_4 の値を求めよ.
- (4) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 x \cos x) e^{2 \sin x} dx$ を求めよ.

30-E-1 F573B

a を実数とするととき, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

- (1) $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\} dx$
- (2) $\int_0^a f(x) dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \{f(x) + f(a-x)\} dx$

30-E-2 F チャレ 73 2010 札幌医科大学

整数 n に対して, a_n を

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^n dx$$

と定める.

- (1) a_{-2} , a_{-1} をそれぞれ求めよ.
- (2) $na_n = 2^{-\frac{n}{2}} + (n-1)a_{n-2}$ が成り立つことを示せ.
- (3) $a_{2n} = b_n + \pi c_n$ (ただし, b_n, c_n は有理数) と表されることを示せ. $n < 0$ のときの c_n を求めよ. 必要ならば π が無理数であることを用いてよい.

30-E-3 F チャレ 7 1 2003 筑波大学

実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が, 次の 2 つの条件 (A), (B) を満たしている.

(A) すべての x について, $f(x) > 0$ である.

(B) すべての x, y について, $f(x+y) = f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ.

- (1) $f(0) = 1$ を示せ.
- (2) $g(x) = \log f(x)$ とするとき, $g'(x) = f'(0) - x$ が成り立つことを示せ.
- (3) $f'(0) = 2$ となるような $f(x)$ を求めよ.

30-E-4

$x + \sqrt{x^2 + 1} = t$ と置き換えることにより, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ を求めよ.

30-E-5

n は自然数とする.

(1) $x > 0$ のとき, 不等式 $\sqrt{x} > \log(x+1)$ が成り立つことを示し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1)$$

を求めよ.

(2) $\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^n dx$ を求めよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^n dx \right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.