数学　小テスト（整数問題）【解答解説】

1	次の方程式の整数解をすべて求めよ。 $3x+5y=1$
2	$\dfrac{84}{2n+1}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。
3	n は自然数とする。$n^2-18n+77$ が素数となるような n の値をすべて求めよ。
4	等式 $xy+3x-2y-10=0$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。
5	次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}\quad(x\leqq y\leqq z)$
6	n は自然数とする。$\sqrt{n^2+56}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。
7	方程式 $x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=0$ の整数解をすべて求めよ。
8	方程式 $48x+539y=77$ を満たす整数解 x, y をすべて求めよ.
9	p, q, r を $p<q<r$ である素数とする．a を正の整数とするとき (1)　等式 $r=q^2-p^2$ を満たす p, q, r の組 (p, q, r) をすべて求めよ. (2)　等式 $r=p^2q^2-1$ を満たす p, q, r は存在しないことを示せ. (3)　等式 $a(a+r)=p^2q^2$ を満たす a, p, q, r の組 (a, p, q, r) をすべて求めよ.

1 解答　$x=5k+2$，$y=-3k-1$ （k は整数）

2 解答　$n=1$，3，10

3 解答　$n=6$，12

4 解答　$(x,\ y)=(3,\ 1)$，$(1,\ -7)$，$(4,\ -1)$，$(0,\ -5)$，$(6,\ -2)$，$(-2,\ -4)$

5 解答　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

6 解答　$n=5$，13

7 解答　$(x,\ y)=(3,\ 2)$，$(4,\ 3)$

8 解答　$x=-77+539t$, $y=7-48t$ （t は整数）

9 解答　(1)　$(p, q, r)=(2, 3, 5)$　　(2)　[略]　　(3)　$(a, p, q, r)=(4, 2, 3, 5)$

$\boxed{1}$ $$3x+5y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$x=2$, $y=-1$ は方程式 ① の整数解の 1 つである。

よって $3\cdot 2+5\cdot(-1)=1 \quad \cdots\cdots ②$

①－② より $3(x-2)+5(y+1)=0$

すなわち $3(x-2)=-5(y+1) \quad \cdots\cdots ③$

3 と 5 は互いに素であるから，③ のすべての整数解は

$x-2=5k$，$y+1=-3k$ （k は整数）

したがって，① のすべての整数解は

$x=5k+2$，$y=-3k-1$ （k は整数）

$\boxed{2}$ 84 を素因数分解すると $84=2^2\cdot 3\cdot 7$

$2n+1$ は奇数であるから，$\dfrac{84}{2n+1}$ が自然数となるのは

$2n+1=3$，$2n+1=7$，$2n+1=3\cdot 7$

のときである。

よって $n=1$，3，10

$\boxed{3}$ $n^2-18n+77=(n-7)(n-11)=(7-n)(11-n)$

$n-11<n-7$，$7-n<11-n$ であるから，$n^2-18n+77$ が素数であるとき

$n-11=1$ または $7-n=1$

すなわち $n=12$ または $n=6$

$n=12$ のとき $n^2-18n+77=(n-7)(n-11)=5\cdot 1=5$ (素数)

$n=6$ のとき $n^2-18n+77=(7-n)(11-n)=1\cdot 5=5$ (素数)

よって，$n^2-18n+77$ が素数となるような n は $n=6$，12

$\boxed{4}$ $xy+3x-2y-10=0$ から $(x-2)(y+3)+6-10=0$

よって $(x-2)(y+3)=4$

x，y は整数であるから，$x-2$，$y+3$ も整数である。

ゆえに $(x-2,\ y+3)=(1,\ 4),\ (-1,\ -4),\ (2,\ 2),\ (-2,\ -2),$
$(4,\ 1),\ (-4,\ -1)$

したがって $(x,\ y)=(3,\ 1),\ (1,\ -7),\ (4,\ -1),\ (0,\ -5),\ (6,\ -2)$
$(-2,\ -4)$

$\boxed{5}$ $1\leqq x\leqq y\leqq z$ から $\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x} \quad \cdots\cdots ①$

よって $\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{11}{6x}$

ゆえに $x\leqq\dfrac{11}{8}$ x は自然数であるから $x=1$

このとき $\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{3} \quad \cdots\cdots ②$

同様に ① を用いて $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}\leqq\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3y}=\dfrac{5}{6y}$

ゆえに $y\leqq\dfrac{5}{2}$ $1=x\leqq y$ から $y=1$，2

$y=1$ のとき，② から　$\dfrac{1}{3z}=-\dfrac{1}{6}$　　　自然数 z はこれを満たさない。

$y=2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{12}$　　　よって　$z=4$　($y\leqq z$ を満たす)

したがって　　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4)$

$\boxed{6}$ $\sqrt{n^2+56}$ が自然数となるとき，k を自然数として，次の式が成り立つ。

$$\sqrt{n^2+56}=k$$

両辺を 2 乗して移項すると　　$k^2-n^2=56$

すなわち　　$(k+n)(k-n)=56$　…… ①

ここで，k，n は $k>n$ を満たす自然数であるから，$k+n$，$k-n$ はともに自然数である。

$k+n>k-n$ であるから，① を満たす自然数 $k+n$，$k-n$ の組は次のようになる。

$(k+n,\ k-n)=(56,\ 1),\ (28,\ 2),\ (14,\ 4),\ (8,\ 7)$

$(k+n)+(k-n)=2k$ は偶数であるから

$(k+n,\ k-n)=(28,\ 2),\ (14,\ 4)$

これを満たす自然数 k，n の組は次のようになる。

$(k,\ n)=(15,\ 13),\ (9,\ 5)$

したがって，求める自然数 n は　　$n=5,\ 13$

$\boxed{7}$ $x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=0$ から

$x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13=0$　…… ①

x についての 2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(y+1)^2-(3y^2-8y+13)\\&=-2y^2+10y-12\\&=-2(y^2-5y+6)\\&=-2(y-2)(y-3)\end{aligned}$$

① の解は整数 (実数) であるから，$D\geqq 0$ である。

よって　　$-2(y-2)(y-3)\geqq 0$

これを解くと　　$2\leqq y\leqq 3$

y は整数であるから　　$y=2,\ 3$

[1]　$y=2$ のとき　　① は　$x^2-6x+9=0$

ゆえに　$x=3$

[2]　$y=3$ のとき　　① は　$x^2-8x+16=0$

ゆえに　$x=4$

[1], [2] から　　$(x,\ y)=(3,\ 2),\ (4,\ 3)$

$\boxed{8}$ 方程式を変形して　$48x=77(1-7y)$

48 と 77 は互いに素であるから，$x=77s$ (s は整数) とおける．ゆえに　$48s=1-7y$

よって　$7y=1-48s=(1+s)-49s$

ここで，$s+1=7t$ (t は整数) とおけるから $y=t-7s=t-7(7t-1)=7-48t$

したがって　$x=77s=77(7t-1)=-77+539t$ (t は整数)

$\boxed{9}$ (1)　$r=q^2-p^2$ から　$r=(q+p)(q-p)$

$r>q>p>0$ であるから　$q+p>q-p>0$

また，r が素数であるから　$r=q+p, 1=q-p$

$q>p$ でかつ p, q が素数であるから，$q>p\geqq 3$ とすると，p, q はいずれも奇数となり，$1=q-p$ に反する．よって　$p=2$　このとき　$r=q+2, 1=q-2$

ゆえに　$q=3, r=5$　これは適する．

したがって　$(p, q, r)=(2, 3, 5)$

(2)　$r=p^2q^2-1$ から $r=(pq+1)(pq-1)$

この等式を満たす p, q, r が存在すると仮定する．

$p\geqq 2$ かつ $q\geqq 3$ であるから $pq+1\geqq 7, pq-1\geqq 5$

よって，r が素数であることに反する．

したがって，$r=p^2q^2-1$ を満たす p, q, r は存在しない．

(3)　$a+r>a>0$ ……①

p, q は素数であるから，p^2q^2 の正の約数は $1, p, q, p^2, pq, q^2, p^2q, pq^2, p^2q^2$

よって，① と $p<q$ から $(a, a+r)=(1, p^2q^2), (p, pq^2), (q, p^2q), (p^2, q^2)$

$(a, a+r)=(1, p^2q^2)$ のとき $1+r=p^2q^2$　このとき，(2) から p, q, r は存在しない．

$(a, a+r)=(p, pq^2)$ のとき　$p+r=pq^2$　　よって　$r=p(q^2-1)$

このとき，$p\geqq 2, q^2-1\geqq 8$ であるから素数 r は存在しない．

$(a, a+r)=(q, p^2q)$ のときも同様に存在しない．$(a, a+r)=(p^2, q^2)$ のとき $p^2+r=q^2$

よって，(1) から　$(p, q, r)=(2, 3, 5)$　　ゆえに　$a=2^2=4$

以上から　$(a, p, q, r)=(4, 2, 3, 5)$