

数学 第1回小テスト 数と式 【解答】

1	次の式を因数分解せよ。 (1) $2x^2+11x+12$ (2) $6x^2-7xy-3y^2$
2	次の2次方程式を解け。 (1) $x^2+4x+1=0$ (2) $3x^2-9x+5=0$
3	次の1次不等式を解け。 $\frac{x}{5} - \frac{x-5}{4} < 2$
4	次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。 $(x+2y)+(x-y)i = -1+2i$
5	$x^2-4x+2=0$ の2つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。 (1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$
6	$2x^2+5xy-3y^2+x+17y-10$ を因数分解せよ。
7	次の方程式を解け。 (1) $ x-1 =2x$ (2) $ x +2 x-2 =5$
8	次の式の2重根号をはずせ。 (1) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$ (2) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$
9	方程式 $x^3-2x^2+ax+b=0$ が $2+i$ を解にもつとき、実数の定数 a, b の値を求めよ。 また、他の解を求めよ。
10	等式 $x^3=x(x+1)(x+2)+ax(x+1)+bx+c$ が x についての恒等式であるとき、定数 a, b, c の値を求めよ。
11	3次方程式 $x^3+x^2+(m-2)x-m=0$ が2重解をもつとき、実数の定数 m の値を求めよ。
12	多項式 $P(x)$ を $x-1, x-2$ で割った余りがそれぞれ5, 7である。 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割った余りを求めよ。
13	整式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ を $x(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ。
14	実数 x が $x^2-\frac{1}{x^2}=6$ を満たしているとき、 $2x^5+2x^4-12x^3-11x^2-2x-4$ の値を求めよ。

数学 第1回小テスト 数と式 【解答】

【配点】

- ① 各5点計10点
② 各5点計10点
③ 5点
④ 5点
⑤ 各5点計10点 BASIC計40点
- ⑥ 5点
⑦ 各5点計10点
⑧ 各5点計10点
⑨ a,bの値に5点, 他の解に5点, 計10点 (−2を書き忘れた場合, −2点)
⑩ 5点
⑪ 因数(x−1)が見つかって4点, 重解を持つとき各3点
⑫ 余り1次の設定に5点, 答えに5点, 計10点 STANDARD計60点
- ⑬ 10点
⑭ 10点 実戦問題計20点
- ① 解答 (1) $(x+4)(2x+3)$ (2) $(2x-3y)(3x+y)$
② 解答 (1) $x = -2 \pm \sqrt{3}$ (2) $x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{6}$
③ 解答 $x > -15$
④ 解答 $x = 1, y = -1$
⑤ 解答 (1) 12 (2) 2
⑥ 解答 $(2x - y + 5)(x + 3y - 2)$
⑦ 解答 (1) $x = \frac{1}{3}$ (2) $x = -\frac{1}{3}, 3$
⑧ 解答 (1) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{14} + \sqrt{6}}{2}$
⑨ 解答 $a = -3, b = 10, x = -2, 2 - i$
⑩ 解答 $a = -3, b = 1, c = 0$
⑪ 解答 $m = -3, 1$
⑫ 解答 $2x + 3$
⑬ 解答 $96x + 24$
⑭ 解答 $1 + \sqrt{10}$

数学 第1回小テスト 数と式 【解答】

$$\boxed{1} \quad (1) \quad 2x^2 + 11x + 12 = 1 \cdot 2x^2 + (1 \cdot 3 + 4 \cdot 2)x + 4 \cdot 3 \\ = (x+4)(2x+3)$$

$$(2) \quad 6x^2 - 7xy - 3y^2 \\ = 2 \cdot 3x^2 + \{2 \cdot y + (-3y) \cdot 3\}x + (-3y) \cdot y \\ = \{2x + (-3y)\}(3x + y) \\ = (2x - 3y)(3x + y)$$

[たすきがけ]

$$(1) \quad \begin{array}{r} 1 \times 4 \rightarrow 8 \\ 2 \times 3 \rightarrow 3 \\ \hline 2 \quad 12 \quad 11 \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{r} 2 \times -3y \rightarrow -9y \\ 3 \times y \rightarrow 2y \\ \hline 6 \quad -3y^2 \quad -7y \end{array}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\ = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$(2) \quad x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} \\ = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{6}$$

$$\boxed{3} \quad \frac{x}{5} - \frac{x-5}{4} < 2$$

両辺に 20 をかけると $20 \cdot \frac{x}{5} - 20 \cdot \frac{x-5}{4} < 20 \cdot 2$

$$4x - 5(x-5) < 40$$

$$4x - 5x + 25 < 40$$

移項すると $-x < 40 - 25$

よって $-x < 15$

両辺に -1 をかけると $x > -15$

$$\boxed{4} \quad x+2y, x-y \text{ は実数であるから}$$

$$x+2y = -1, x-y = 2$$

この連立方程式を解くと $x=1, y=-1$

$$\boxed{5} \quad \text{解と係数の関係から} \quad \alpha + \beta = -\frac{-4}{1} = 4, \quad \alpha\beta = \frac{2}{1} = 2$$

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot 2 = 12$$

$$(2) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{4}{2} = 2$$

数学 第1回小テスト 数と式 【解答】

$$\begin{aligned}
 \text{[6]} \quad 2x^2 + 5xy - 3y^2 + x + 17y - 10 &= 2x^2 + (5y+1)x - (3y^2 - 17y + 10) \\
 &= 2x^2 + (5y+1)x - (3y-2)(y-5) \\
 &= \{2x - (y-5)\}\{x + (3y-2)\} \\
 &= (2x - y + 5)(x + 3y - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \quad \times \quad -(y-5) \longrightarrow -y+5 \\
 1 \quad \times \quad 3y-2 \longrightarrow 6y-4 \\
 \hline
 2 \qquad \qquad \qquad 5y+1
 \end{array}$$

[7] (1) [1] $x-1 \geq 0$ すなわち $x \geq 1$ のとき

$$|x-1| = x-1 \text{ であるから } x-1 = 2x$$

$$\text{これを解くと } x = -1$$

これは $x \geq 1$ を満たさない。

[2] $x-1 < 0$ すなわち $x < 1$ のとき

$$|x-1| = -(x-1) \text{ であるから } -(x-1) = 2x$$

$$\text{これを解くと } x = \frac{1}{3}$$

これは $x < 1$ を満たす。

$$\text{以上から, 解は } x = \frac{1}{3}$$

(2) [1] $x < 0$ のとき

$$|x| = -x, |x-2| = -(x-2) \text{ であるから } -x - 2(x-2) = 5$$

$$\text{これを解くと } x = -\frac{1}{3}$$

これは $x < 0$ を満たす。

[2] $0 \leq x < 2$ のとき

$$|x| = x, |x-2| = -(x-2) \text{ であるから } x - 2(x-2) = 5$$

$$\text{これを解くと } x = -1$$

これは $0 \leq x < 2$ を満たさない。

[3] $x \geq 2$ のとき

$$|x| = x, |x-2| = x-2 \text{ であるから } x + 2(x-2) = 5$$

$$\text{これを解くと } x = 3$$

これは $x \geq 2$ を満たす。

$$\text{以上から, 解は } x = -\frac{1}{3}, 3$$

数学 第1回小テスト 数と式 【解答】

$$\begin{aligned} \text{[8] (1)} \quad \sqrt{8-\sqrt{48}} &= \sqrt{8-2\sqrt{12}} = \sqrt{(6+2)-2\sqrt{6}\cdot 2} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \sqrt{5+\sqrt{21}} &= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{21}}{2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{(7+3)+2\sqrt{7}\cdot 3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{[9]} \quad x=2+i \text{ が方程式の解であるから } (2+i)^3-2(2+i)^2+a(2+i)+b=0$$

$$\text{整理すると } (2a+b-4)+(a+3)i=0$$

$$2a+b-4, a+3 \text{ は実数であるから } 2a+b-4=0, a+3=0$$

$$\text{これを解いて } a=-3, b=10$$

$$\text{よって, 方程式は } x^3-2x^2-3x+10=0$$

$$\text{左辺を因数分解すると } (x+2)(x^2-4x+5)=0$$

$$\text{よって, 方程式の解は } x=-2, 2\pm i$$

$$\text{したがって, 他の解は } x=-2, 2-i$$

$$x=3 \text{ が方程式の解であるから } 3^3+a\cdot 3^2+11\cdot 3-6=0$$

$$\text{すなわち } 9a+54=0 \quad \text{よって } a=-6$$

$$\text{このとき, 方程式は } x^3-6x^2+11x-6=0$$

$$\text{左辺は } x-3 \text{ を因数にもつから, } x-3 \text{ で割ると, 商は } x^2-3x+2 \text{ となり}$$

$$(x-3)(x^2-3x+2)=0$$

$$(x-3)(x-1)(x-2)=0$$

$$\text{よって, 方程式の解は } x=1, 2, 3$$

$$\text{したがって, 残りの解は } x=1, 2$$

$$\text{[10]} \quad \text{等式に } x=0 \text{ を代入すると } 0=c \quad \dots\dots \text{①}$$

$$\text{等式に } x=-1 \text{ を代入すると } -1=-b+c \quad \dots\dots \text{②}$$

$$\text{等式に } x=-2 \text{ を代入すると } -8=2a-2b+c \quad \dots\dots \text{③}$$

$$\text{①, ②, ③ を解いて } a=-3, b=1, c=0$$

$$\text{逆に, この値を右辺に代入すると } x^3 \text{ となり, 左辺と一致する。}$$

$$\text{よって } a=-3, b=1, c=0$$

数学 第1回小テスト 数と式 【解答】

11 $P(x) = x^3 + x^2 + (m-2)x - m$ とすると

$$P(1) = 1^3 + 1^2 + (m-2) \cdot 1 - m = 0$$

よって、 $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + m \\ x-1 \overline{) x^3 + x^2 + (m-2)x - m} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 2x^2 + (m-2)x \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ mx - m \\ \underline{mx - m} \\ 0 \end{array}$$

よって、 $(x-1)(x^2 + 2x + m) = 0$ より

$$x=1 \quad \text{または} \quad x^2 + 2x + m = 0$$

[1] $x^2 + 2x + m = 0$ が 1 を解にもつ場合

$$1^2 + 2 \cdot 1 + m = 0 \quad \text{より} \quad m = -3$$

このとき、方程式は $(x-1)^2(x+3) = 0$ となり、2重解 1 をもつ。

[2] $x^2 + 2x + m = 0$ が重解をもつ場合

$$\text{判別式 } D = 0 \quad \text{より} \quad 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0$$

$$\text{よって} \quad m = 1$$

このとき、方程式は $(x-1)(x+1)^2 = 0$ となり、2重解 -1 をもつ。

[1], [2] より $m = -3, 1$

12 $P(x)$ を 2次式 $(x-1)(x-2)$ で割った余りを $ax+b$ とおいて、商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

この等式より $P(1) = a + b, P(2) = 2a + b$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 5 であるから $P(1) = 5$

$x-2$ で割った余りが 7 であるから $P(2) = 7$

よって $a + b = 5, 2a + b = 7$ これを解くと $a = 2, b = 3$

したがって、求める余りは $2x + 3$

数学 第1回小テスト 数と式 【解答】

13 求める余りは1次以下の整式または0であるから、 $ax+b$ とおく.

商を $Q(x)$ とすると $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x(x-1)Q(x)+ax+b$ が成り立つ.

$x=0$ とおくと $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = b$ ゆえに $b=24$

$x=1$ とおくと $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = a+b$ ゆえに $a+24=120$ よって $a=96$

したがって、求める余りは $96x+24$

$$\begin{aligned} \text{別解 } (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) \\ &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) \\ &= x^4+10x^3+35x^2+50x+24 \end{aligned}$$

また $x(x-1)=x^2-x$

$$\begin{array}{r} x^2+11x+46 \\ x^2-x \overline{) x^4+10x^3+35x^2+50x+24} \\ \underline{x^4-x^3} \\ 11x^3+35x^2 \\ \underline{11x^3-11x^2} \\ 46x^2+50x \\ \underline{46x^2-46x} \\ 96x+24 \end{array}$$

よって、余りは $96x+24$

14 $x^2 - \frac{1}{x^2} = 6$ の両辺に x^2 を掛けて整理すると

$$x^4 - 6x^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots \text{①} \qquad \text{よって} \quad x^4 = 6x^2 + 1$$

ゆえに $2x^5 + 2x^4 - 12x^3 - 11x^2 - 2x - 4$

$$= 2x(6x^2+1) + 2(6x^2+1) - 12x^3 - 11x^2 - 2x - 4 = x^2 - 2$$

①を x^2 の2次方程式とみて解くと $x^2 = 3 \pm \sqrt{10}$

x は0でない実数であるから $x^2 > 0$ よって $x^2 = 3 + \sqrt{10}$

したがって、求める式の値は $x^2 - 2 = (3 + \sqrt{10}) - 2 = 1 + \sqrt{10}$