第３２章　積分の応用Ｉ（数Ⅲ，３講分）

Ａ問題

32-A-1　F609A

定積分 $\displaystyle\int_0^2 |\,x-1\,|e^x\,dx$ を求めよ．

32-A-2　＊　F610A

n は自然数とする．定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} |\,\sin nx + \sqrt{3}\cos nx\,|\,dx$ を求めよ．

32-A-3　F611A

$1 < a < e$ のとき，関数 $f(a) = \displaystyle\int_0^1 |\,e^x - a\,|\,dx$ の最小値を求めよ．

32-A-4　F617A

曲線 $y = \dfrac{-2x+2}{x+1}$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

32-A-5　F618A

次の図形の面積を求めよ．

(1)　曲線 $y = e^x$ と直線 $x = 1$，x 軸，y 軸で囲まれた図形．

(2)　曲線 $y = e^x$ と直線 $y = e^2$，y 軸で囲まれた図形．

$\boxed{\text{32-A-6}}$ F619A

次の図形の面積を求めよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，2 曲線 $y = \sqrt{3}\tan x$，$y = 2\sin x$ で囲まれた図形．

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，2 曲線 $y = \cos x$，$y = \cos 2x$ で囲まれた図形．

$\boxed{\text{32-A-7}}$ F625A

xy 平面において，原点から曲線 $C : y = e^x$ に引いた接線を l とする．

(1) l の方程式を求めよ．

(2) C，l と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\text{32-A-8}}$ * F626A

曲線 $C_1 : y = ax^2$ と曲線 $C_2 : y = \log x$ はただ 1 点を共有し，その点におけるそれぞれの接線が一致しているものとする．

(1) 定数 a の値と共有点の座標を求めよ．

(2) C_1，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\text{32-A-9}}$ * F627A

媒介変数 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ を用いて，

$$\begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と表される曲線を C とする．

(1) C の概形をかけ．

(2) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

B問題

32-B-1　F612B

$f(t) = \int_0^1 |\, t - x \,| e^x \, dx$ とする．

(1)　$f(t)$ を求めよ．

(2)　$f(t)$ の最小値を求めよ．

32-B-2　＊　F613B

(1)　自然数 k に対して，$I_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x} \sin x \, dx$，$J_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x} \cos x \, dx$ とするとき，$I_k + J_k$，$I_k - J_k$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2)　n を自然数とするとき，$\lim_{n \to \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\, \sin x \,| \, dx$ を求めよ．

32-B-3　＊　F614B

関数 $f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\, \sin x - a \cos x \,| \, dx$ の最小値を求めよ．

$\boxed{\text{32-B-4}}$ F620B

次の図形の面積を求めよ.

(1) 2 曲線 $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 2 曲線 $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

$\boxed{\text{32-B-5}}$ F621B

2 曲線 $y = x^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

$\boxed{\text{32-B-6}}$ ＊ F622B

2 曲線 $C_1 : y = 2\sqrt{x-1}$, $C_2 : y = \log(x-1) + 2$ がある.

(1) C_1, C_2 はただ 1 つの共有点をもつことを示せ.

(2) C_1, C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

32-B-7　F628B

xy 平面上に，媒介変数 θ $\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ を用いて表される曲線

$$C : x = \tan\theta, \quad y = \cos 2\theta$$

がある．

(1)　C の概形をかけ．

(2)　C と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

32-B-8　F629B

$t > 0$ とする．曲線 $y = \log x$ と x 軸と 2 直線 $x = t$，$x = t + 1$ で囲まれた図形の面積の最小値を求めよ．

32-B-9　＊　F630B

曲線 $y = \sin 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を，曲線 $y = a\sin x$ が二等分するような定数 a の値を求めよ．

C問題

32-C-1　F615C

0 以上の整数 n に対して，$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$ とする．ただし，$\tan^0 x = 1$ とする．

(1) I_0，I_1 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ を示せ．

(4) 1 以上の整数 n に対して，

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$
$$T_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$$

とするとき，　および　の値を求めよ。

32-C-2　F623C

曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 4$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

32-C-3　F624C

曲線 $y^2 = x^2(4 - x^2)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\text{32-C-4}}$　F チャレ 77　京都大学

次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx|\, dx$$

$\boxed{\text{32-C-5}}$　F ﾁｬﾚ 78　2006 大阪大学

曲線 C : $y = x \sin^2 x$ と直線 l : $y = x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，$\cdots$ とし，第 n 番目のものを A_n とする．

(1)　点 A_n の x 座標を求めよ．また，点 A_n において，C と l は接していることを示せ．

(2)　線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と C で囲まれる図形の面積を求めよ．

$\boxed{\text{32-C-6}}$ F631C

媒介変数 θ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を用いて,

$$x = \cos^3\theta, \quad y = \sin^3\theta$$

と表される曲線で囲まれた図形の面積を求めよ.

$\boxed{\text{32-C-7}}$ F631C

媒介変数 t を用いて,

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = 2 + t - t^2 \end{cases}$$

と表される曲線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

演習問題

32-E-1

曲線 C : $y=\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 l : $y=ax$ $(a>0)$ および y 軸で囲まれる図形の面積を S_1 とする．また，C と l および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれる図形の面積を S_2 とし，$S=S_1+S_2$ とする．このとき，S の最小値を求めよ．

32-E-2

以下、Coming soon！！